# Aborder des problèmes avec la calculatrice Fx-CP400 - Tome 2

*Par Jean-Philippe Blaise*

CASIO®

www.casio-education.fr

# Introduction

Un petit mot pour vous présenter ce manuel dédié à la Fx-CP400, graphique formelle de la gamme CASIO.

Dans un premier temps, il est à noter que cet ouvrage n'est pas un mode d'emploi d'utilisation de la calculatrice.

Il n'a pas vocation à vous offrir les démarches précises pour manipuler ce formidable outil.

Son but sera de vous offrir des axes de réflexion pédagogique autour de différents problèmes mathématiques plus ou moins classiques en exploitant au mieux les possibilités techniques offertes par ce support.

Ainsi, nous trouverons dans cet ouvrage des applications exploitant la géométrie dynamique, le calcul formel, le tableur, l'approximation, l'algorithmique etc.

Le tout parfois, dans des exemples s'appliquant à mélanger les axes de résolutions pour offrir une parfaite autonomie d'analyse et d'interprétation.

Les exercices abordés devront être considérés comme des pistes de réflexions et non comme des valeurs didactiques figées et c'est dans ce sens que les démonstrations ainsi que les axes supplémentaires d'investissement resteront à la charge du lecteur.

Je vous souhaite une belle expérience mathématique à la hauteur de l'ambition qui est sous-entendue tout au long des problèmes que vous rencontrerez au fil des pages.

Mathématicalement,

Jean Philippe BLAISE

# Sommaire


L'octogone régulier page 5

Le compas du professeur page 17

Les trois dés page 27

L'échiquier, seuil et algorithme page 37

Courbe exponentielle, point par point page 47

Les deux échelles page 53

Tangeante à la courbe page 63

# L'octogone régulier

Voici un problème qui va nous permettre d'aboutir à divers raisonnements et mises en œuvre.

> Quelle est l'aire d'un octogone régulier en fonction de la longueur d'un de ses côtés ?
>
> **Questionnement de base**

## Rapport d'aire

> Lorsqu'on relie les sommets d'un octogone régulier (*de 3 en 3*), on obtient un nouvel octogone régulier. Quel est le rapport d'aire entre l'octogone de départ et celui ainsi construit ?
>
> **Questionnement 1**

## Octogone et origami

> Il est possible de construire un octogone régulier à partir d'un carré de papier. Peut-on par ce biais retrouver le rapport d'aire du questionnement précédent ?
>
> **Questionnement 2**

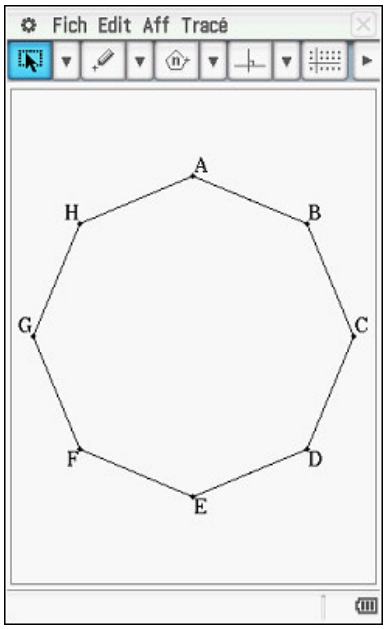
## Rapport de longueur

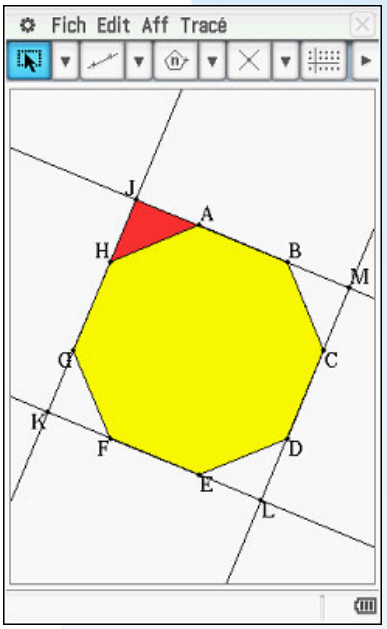
> Le même type de questionnement qu'à la question 2 est possible :
> Quel est le rapport entre la longueur d'un carré de papier et la longueur du côté de l'octogone obtenu par pliage de ce carré ?
>
> **Questionnement 3**

## Questionnement de base, formule d'aire

***Utilisation de la géométrie pour répondre à ce problème et du calcul formel pour formuler une expression cohérente***

Dans un **premier temps**, une figure devra nous être utile pour nous approprier le problème.




Capture b.1 Capture b.2 Capture b.3

Capture b.1 : Le mode *Géométrie* permet de construire directement la figure via le menu *n-gon*. Il suffit de proposer le nombre *n* de côtés voulus:

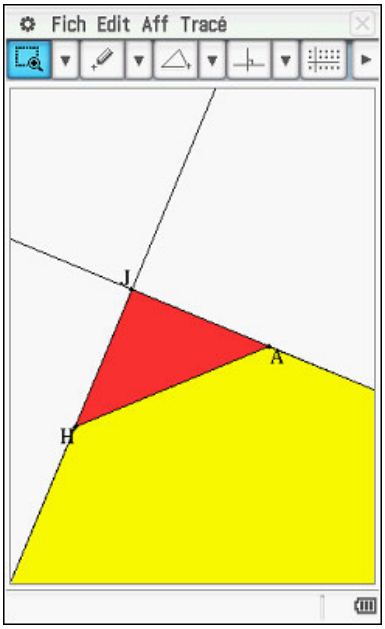
$$n = 8$$

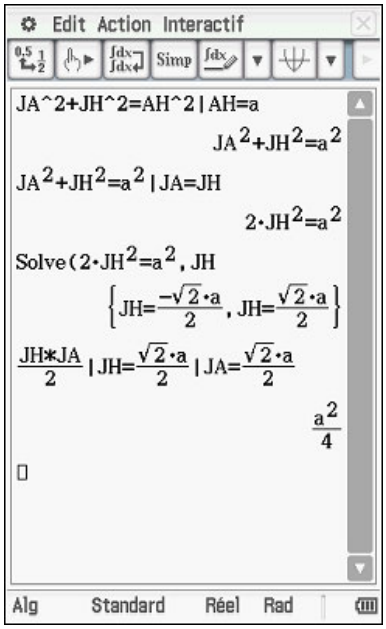
Capture b.2 : Nous avons un octogone régulier ABCDEFGH. Posons :

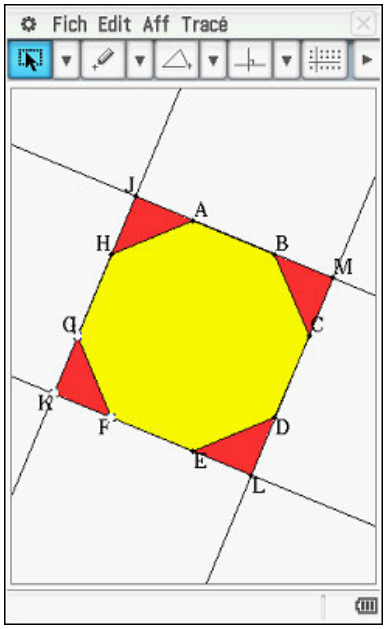
$$\boldsymbol{AB = a}$$

Capture b.3 : Il est maintenant possible de trouver une piste permettant un calcul de l'aire en fonction de la longueur $a$ du côté du polygone.
Pour ce faire, nous avons prolongé les côtés et inscrit cet octogone dans un carré.
*(Un moyen pour ne pas utiliser l'aire des triangles isocèles souvent utilisés pour ce type de calcul)*

Dans un **second temps**, la figure va nous permettre d'avoir la possibilité d'envisager quelques calculs.




Capture b.4 Capture b.5 Capture b.6

Capture b.4 : Le triangle JHA est rectangle en J et son hypoténuse est connue.

$$AH = a$$

Capture b.5 : Le mode *principal* permet de faire des calculs formels complexes. La propriété de Pythagore nous donne :

$$JA^2 + JH^2 = AH^2$$

L'utilisation du *sachant* (|) permet d'affecter à des variables explicites (JA, JH, …) les valeurs correspondantes au problème.
Ainsi, on trouve que l'aire du triangle JHA vaut :

$$\boldsymbol{Aire_{JHA} = \frac{a^2}{4}}$$

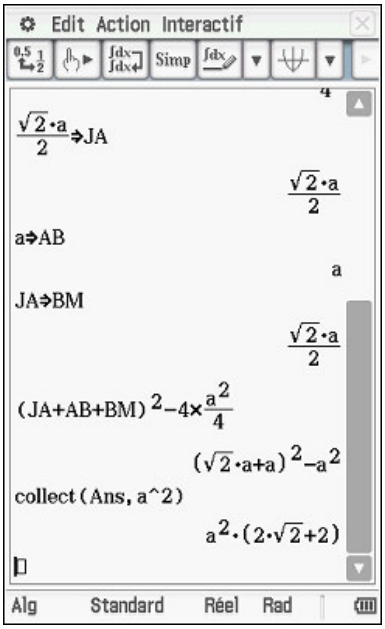
Capture b.6 : Pour calculer l'aire de l'octogone, nous pouvons calculer l'aire du carré JLMK et lui enlever les aires des triangles rectangles isocèles correspondants.

La longueur du carré $l$ est connue en fonction de $a$ :

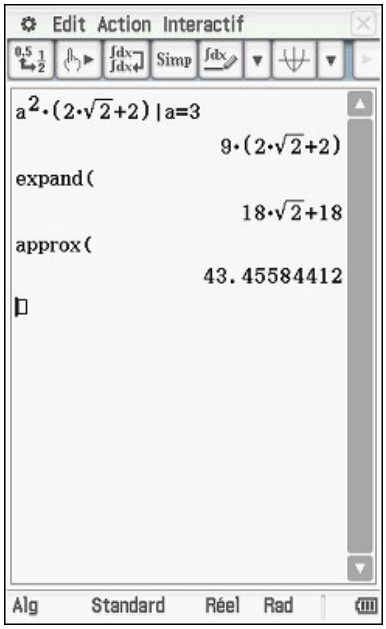
$$l = JA + AB + BM$$

$$l = \frac{\sqrt{2}a}{2} + a + \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

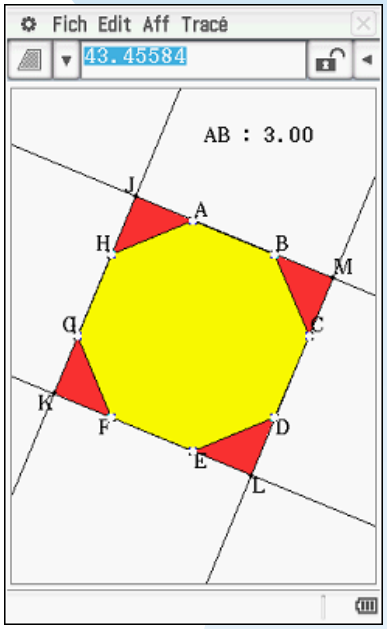
$$\boldsymbol{l = a(\sqrt{2} + 1)}$$




Capture b.7




Capture b.8




Capture b.9

Capture b.7 : Il est possible d'affecter les valeurs formelles trouvées précédemment à des variables. Ainsi, le calcul se simplifie et devient compréhensible directement par lecture sur l'écran. On trouve dès lors l'aire d'un octogone régulier en fonction de la longueur d'un de ses côtés :

$$\boldsymbol{Aire_{octogone} = a^2(2\sqrt{2}+2)}$$

Capture b.8 : Calculons l'aire d'un octogone régulier ayant 3 cm de côté.

On trouve :

$$Aire_{octogone,3cm} = 9(2\sqrt{2}+2)$$

$$Aire_{octogone,3cm} = 18\sqrt{2}+18$$

$$Aire_{octogone,3cm} \approx 43{,}46\ cm^2$$

Capture b.9 : La géométrie dynamique nous confirme cela directement en affectant 3 à la longueur $AB$ et en mesurant l'aire de la figure.

$$AB = 3\ cm$$

donne :

$$Aire_{ABCDEFGH} \approx 43{,}4558\ cm^2$$

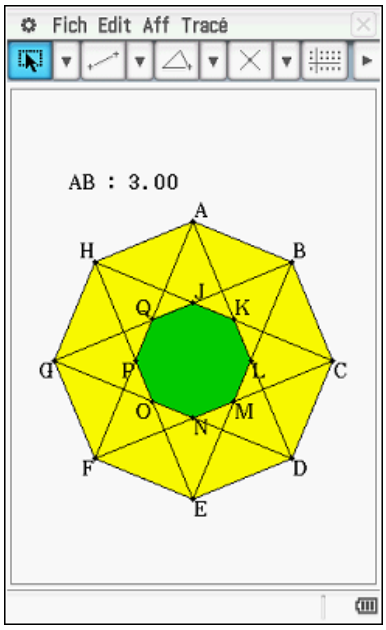
Un moyen de vérification utile lors de calculs complexes.

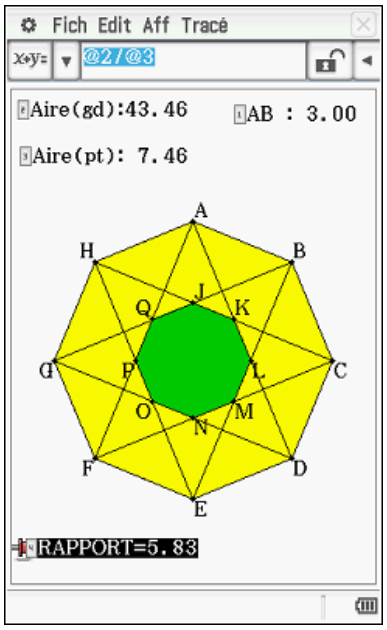
## Questionnement 1, rapport d'aire

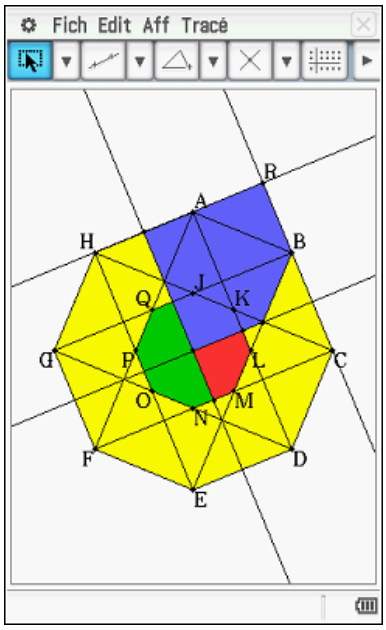
***Appropriation du problème et mise en œuvre***

Quel est le rapport entre l'aire de l'octogone de départ et la réduction trouvée en joignant les sommets éloignés tous les 3 en 3 ?

Dans le même mode opératoire, nous allons compléter la figure géométrique précédente pour y trouver les liens avec un mode calculatoire complexe qui nous permettra d'aboutir à un rapport. Il nous faudra simplement envisager une vérification sur la figure avant de conclure.




Capture 1.1 Capture 1.2 Capture 1.3

Capture 1.1 : En utilisant la création de *segments* ainsi que le bouton *intersection*, nous pouvons construire rapidement la figure adéquate. Il est à partir de là possible de la colorier (menu *style*) et d'y prendre les mesures d'aire.

Capture 1.2 : Dans la figure, nous pouvons y faire glisser les aires mesurées et insérer une expression mathématique en fonction des résultats trouvés.

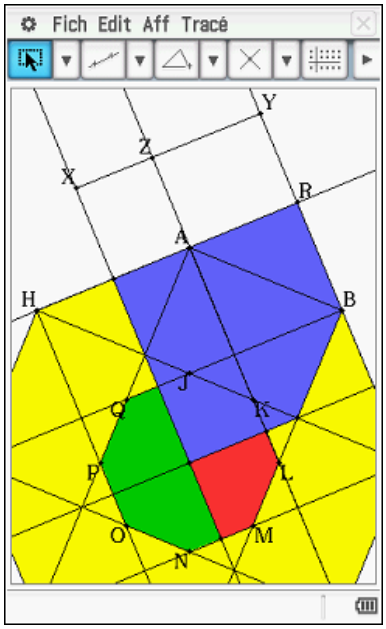
$$EXPRESSION = @1 : @2$$

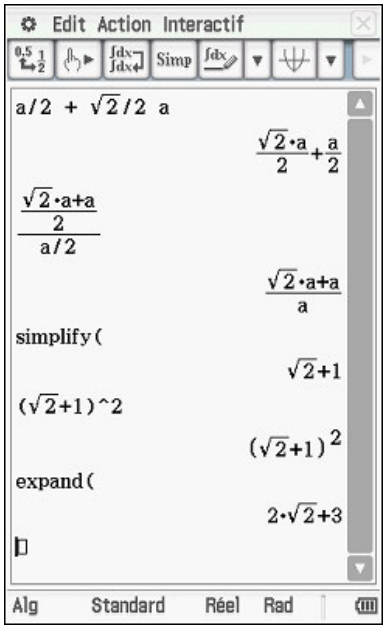
où @1 représente l'aire du grand octogone et @2 celui du petit.

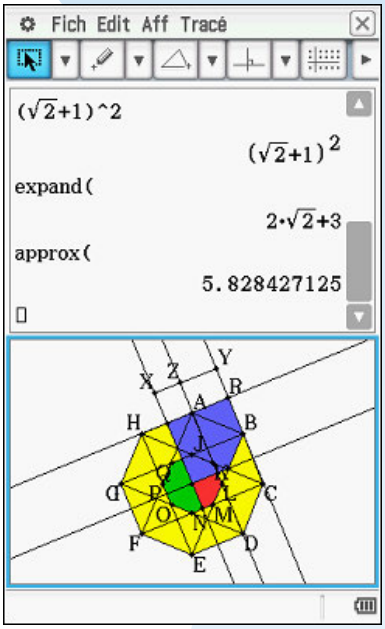
Ce qui nous donne un rapport approximatif :

$$\boldsymbol{Rapport_{aire} \approx 5,83}$$

Capture 1.3 : Les polygones colorés en bleu et en rouge vont nous servir à trouver le rapport de longueur entre les côtés des deux octogones. Bien-entendu, un travail sur la figure serait nécessaire pour justifier que le polygone rouge est une réduction du bleu. La piste des angles est acceptable pour une démonstration rapide.




Capture 1.4 Capture 1.5 Capture 1.6

Capture 1.4 : Intéressons-nous à la longueur XY représentant la longueur d'un des côtés du polygone bleu.

$$\boldsymbol{XY = XZ + ZY}$$

avec $XZ$ qui représente la demi-longueur $a$ du grand octogone et ZY la longueur du triangle rectangle isocèle vu dans le questionnement de base

$$XZ = \frac{a}{2}$$

$$ZY = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

Capture 1.5 : La longueur XZ correspond aussi au côté équivalent du polygone rouge. Du coup, on peut directement calculer le rapport des longueurs entre les deux figures :

$$Rapport_{longueur} = \frac{XY}{XZ}$$

$$Rapport_{longueur} = 1 + \sqrt{2}$$

Dans un *agrandissement/réduction*, le rapport d'aire est le carré du rapport des longueurs. On obtient :

$$Rapport_{aire} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{Rapport_{aire} = 3 + 2\sqrt{2}}$$

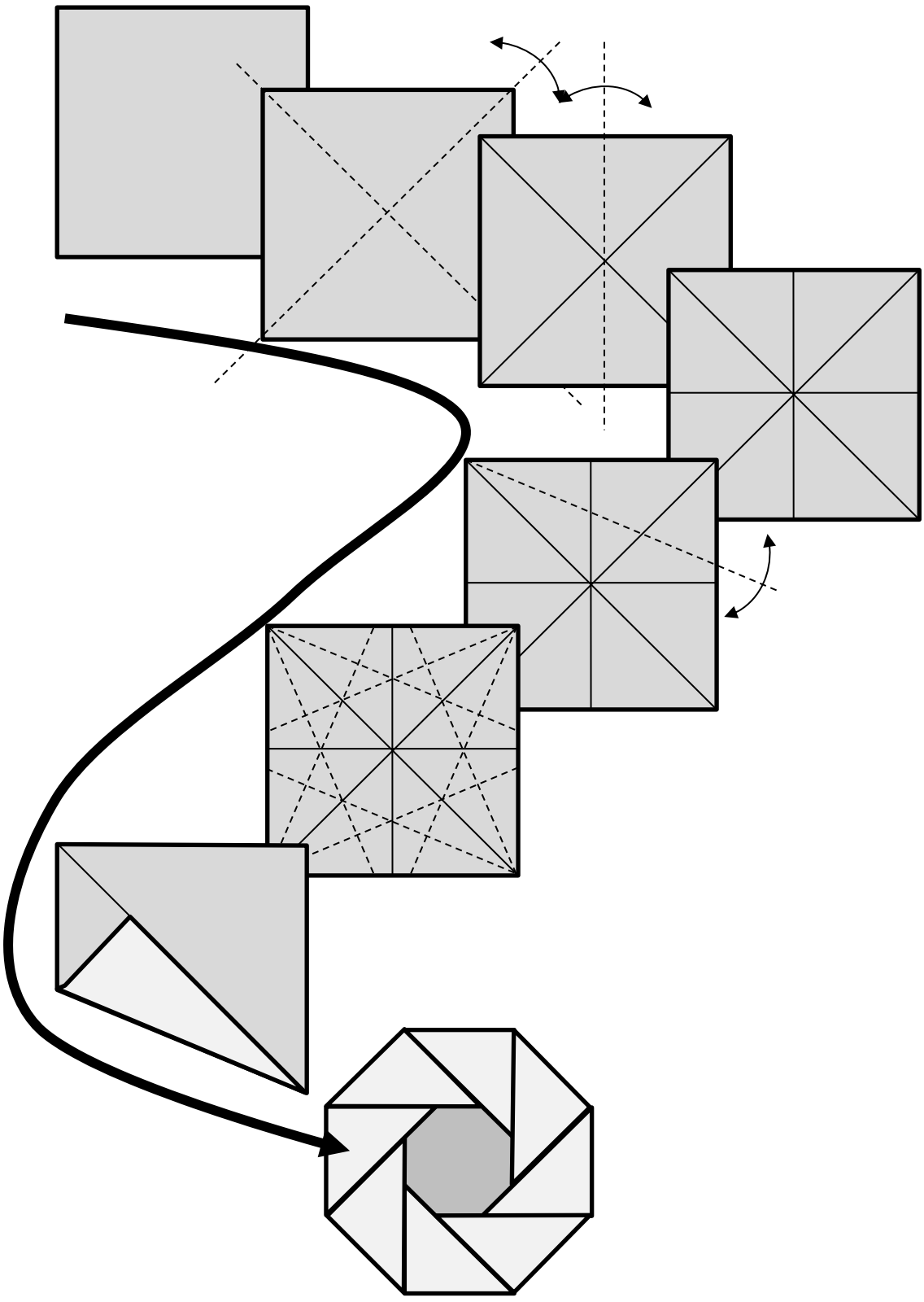
Capture 1.6 : On retrouve la valeur de la capture 1.2.

$$\boldsymbol{Rapport_{aire} \approx 5.83}$$

## Questionnement 2, origami et calcul d'aire

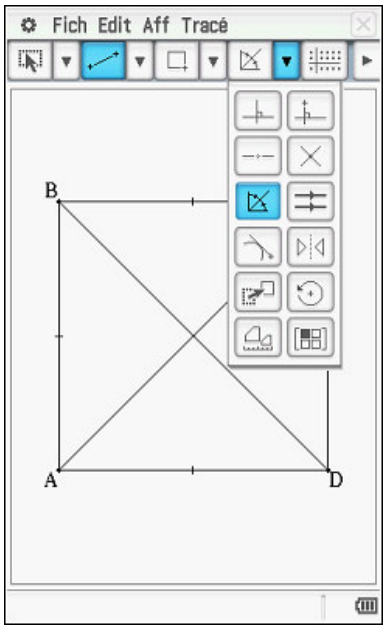
***Construction papier***

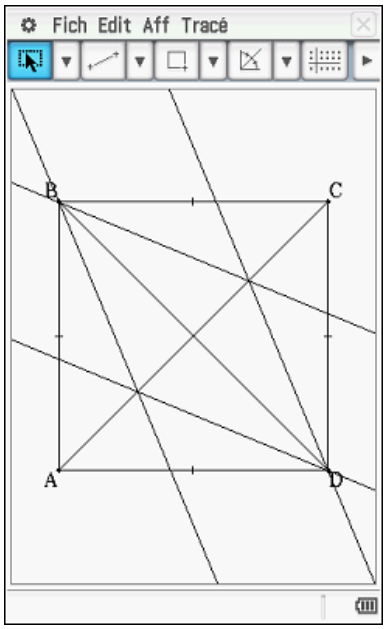
Voici le diagramme permettant d'obtenir un octogone régulier via une feuille de papier en forme de carré.

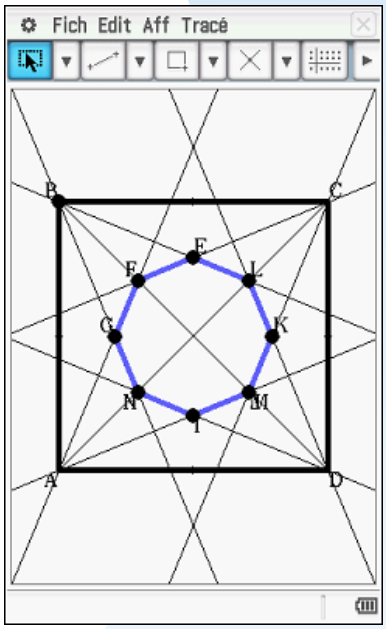


Cette construction permet de faire apparaitre la figure du questionnement précédent. Nous avons physiquement construit un octogone régulier ainsi que son octogone intérieur réduit.

La construction fait apparaitre une autre vision du problème.  Une piste à exploiter pour retrouver le rapport des aires entre ces deux figures.



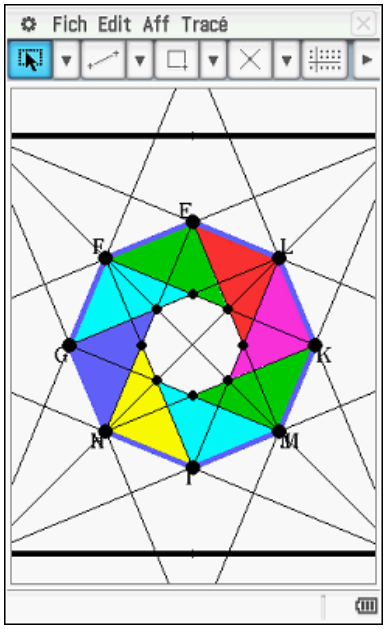



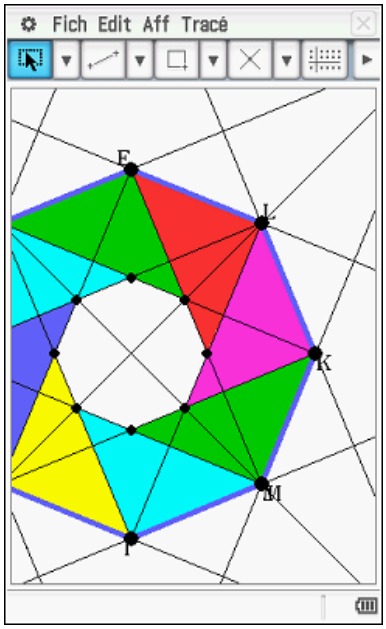

Capture 2.1 Capture 2.2 Capture 2.3

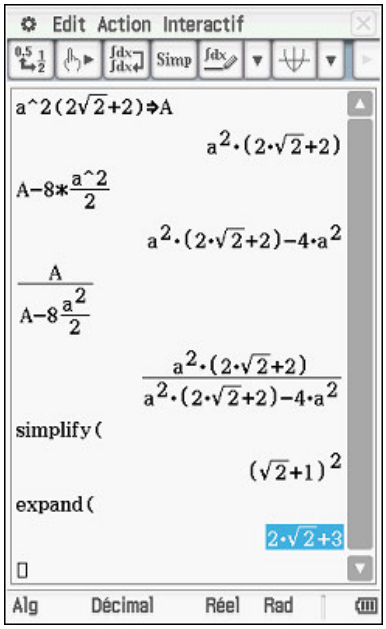
Capture 2.1 : Il est possible de reproduire les plis du diagramme de l'origami directement dans le mode géométrie. On commence par un carré puis, le menu *bissectrice* va être répété 8  fois.

Capture 2.2 : Ce mode de construction permet d'obtenir le pliage de l'octogone dans sa version dépliée.

Capture 2.3 : Nous trouvons une figure intéressante que nous exploiterons dans le questionnement 3. Il est agréable de visualiser l'octogone régulier via une autre méthode que la construction directe d'un *n-gon* comme dans le questionnement précédent.




Capture 2.4 Capture 2.5 Capture 2.6

Capture 2.4 : Le dépliage complet fait apparaitre l'octogone ainsi que sa version réduite. Avec l'origami, nous avons une autre vision de l'aire de la réduction. Rappelons que l'aire d'un octogone est :

$$Aire_{octogone} = a^2(2\sqrt{2}+2)$$

Capture 2.5 : L'aire de la réduction se trouve par soustraction, en lui enlevant les 8 triangles rectangles isocèles qui apparaissent dans les pliages précédents :

$$Aire_{réduction} = a^2(2\sqrt{2}+2) - 8.\frac{a^2}{2}$$

Capture 2.6 : On retrouve via le mode principal, un rapport d'aire directement sans passer par le carré du rapport de la longueur (que nous retrouvons via ce calcul) :

$$Rapport_{aire} = \frac{Aire_{octogone}}{Aire_{réduction}}$$

$$Rapport_{aire} = \frac{a^2(2\sqrt{2}+2)}{a^2(2\sqrt{2}-2)}$$

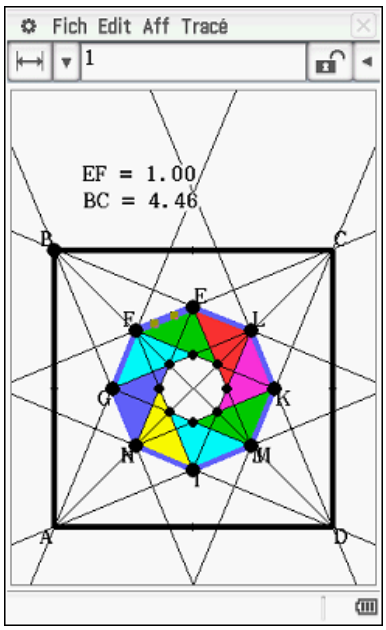
$$\boldsymbol{Rapport_{aire} = 3 + 2\sqrt{2}}$$

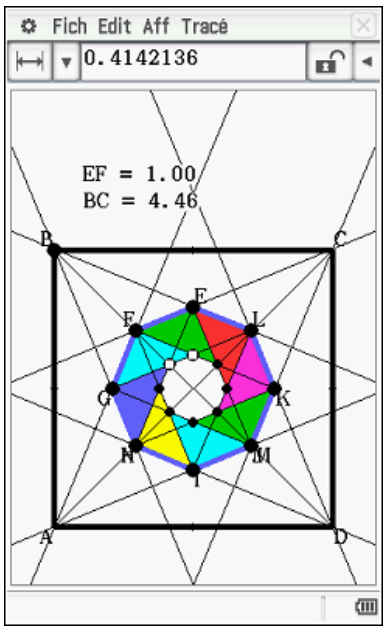
$$\boldsymbol{Rapport_{aire} \approx 5.83}$$

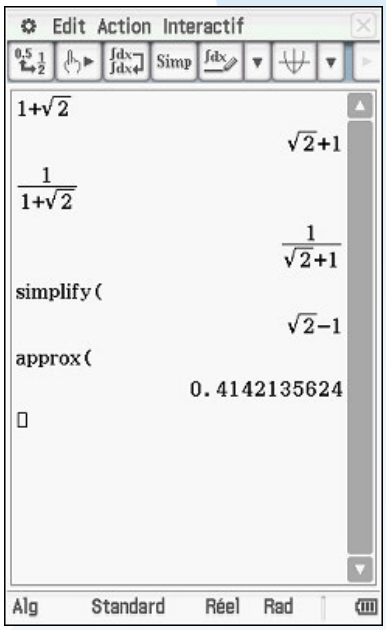
## Questionnement 3, origami et rapport de longueur

### *Utilisation du diagramme déplié*

La feuille de papier sera considérée comme notre longueur de départ.
Quel est le rapport entre la taille de son côté et l'octogone obtenu ?




Capture 3.1 Capture 3.2 Capture 3.3

Capture 3.1 : Même pour une figure complexe avec plusieurs degrés d'implications, il est possible d'imposer un redimensionnement. Ainsi, posons :

$$EF = 1$$

Capture 3.2 : La sélection directe du côté du carré permet de donner une valeur approximative du rapport entre la longueur du carré et l'octogone obtenu :

$$Rapport_{origami} = \frac{BC}{EF}$$

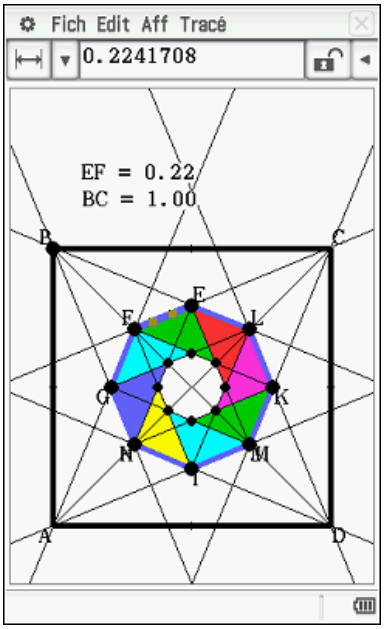
$$\boldsymbol{Rapport_{origami} \approx 4.46}$$

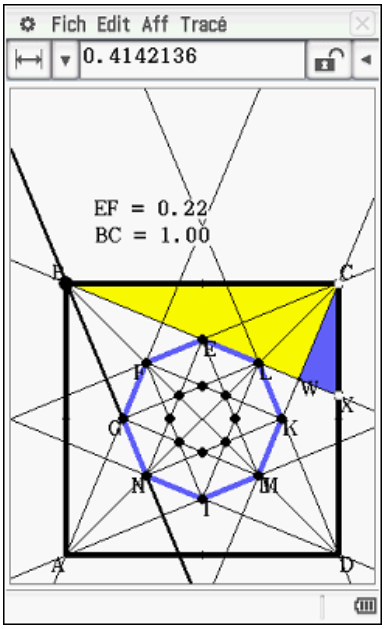
Il est aussi possible de vérifier en sélectionnant un côté du petit octogone, que le rapport correspond aux conclusions précédentes.

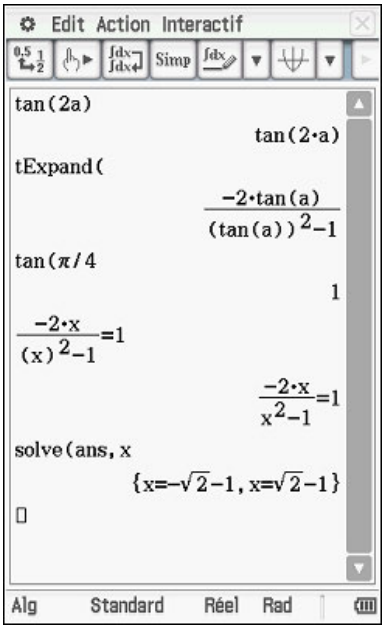
Capture 3.3 : A savoir :

$$Rapport_{octogone} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{Rapport_{octogone} \approx 0.41}$$




Capture 3.4 Capture 3.5 Capture 3.6

Capture 3.4 : De même, si on décide de poser comme unité le côté du carré, on trouve pour EF :

$$BC = 1$$
$$\boldsymbol{EF \approx 0.22}$$

Rapport que nous allons retrouver avec le calcul.

Capture 3.5 : Travaillons dans le triangle BCX rectangle en C.

$$CX = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\boldsymbol{CX = \sqrt{2} - 1}$$

Capture 3.5 : Retrouvons pourquoi $tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ ? On sait que :

$$\tan(2\sigma) = \frac{2\tan(\sigma)}{1 - \tan^2(\sigma)}$$

Or

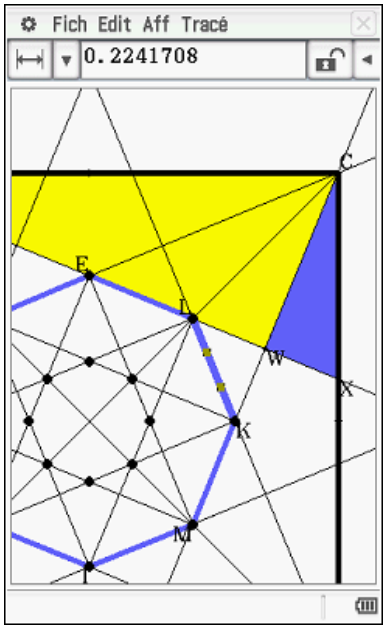
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{8}\right)$$

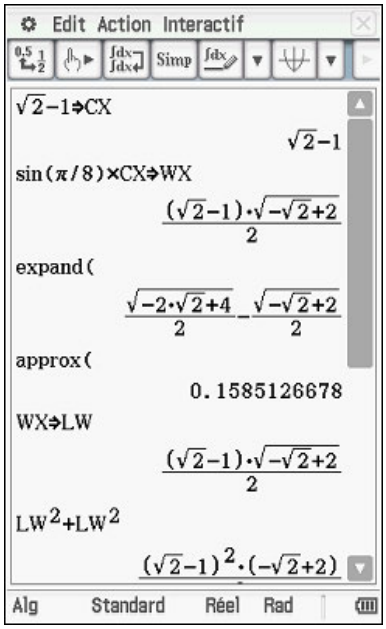
Il suffit de résoudre l'équation du second degré :

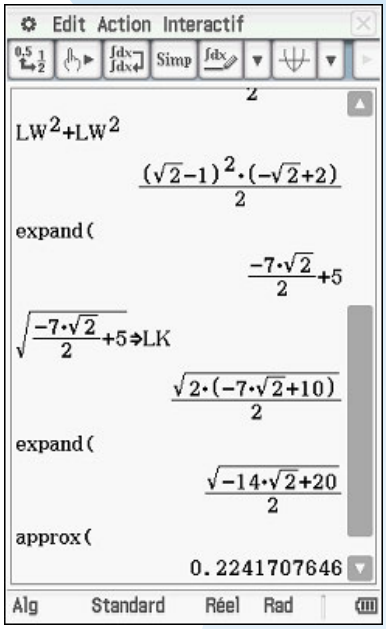
$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

Avec,

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$




Capture 3.7 Capture 3.8 Capture 3.9

Capture 3.7 : Travaillons dans le triangle rectangle CWX, par pliage, on arrive à retrouver qu'il est semblable au triangle précédent.

Capture 3.8 : Nous pouvons calculer WX :

$$WX = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Capture 3.9 : Le dépliage de la feuille fait apparaitre quelques symétries.
Par exemple : il est visible que le triangle LWK est rectangle isocèle.
Nous pouvons donc, calculer la longueur LK qui représente la longueur recherchée de l'octogone :

$$\boldsymbol{l = \frac{\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}}{2}}$$

Soit, environ la valeur visible directement sur le graphique (capture 3.7).

$$l \approx 0.224$$

C.Q.F.D. !

# Le compas du professeur

Voici un problème simple à mettre en œuvre et qui pourtant permet d'avoir différents questionnements :

> Pour quelle ouverture d'un compas forme-t-on un triangle isocèle d'aire maximale ?
>
> **Questionnement de base**

## Travail en géométrie dynamique

> Quelle est l'ouverture d'un compas permettant d'avoir une aire maximale?
>
> Peut-on répondre à ce type de questionnement sans avoir de notions complexes en mathématiques ?
>
> **Questionnement 1**

## Formule de l'aire

> Peut-on trouver la réponse logiquement sans démarche calculatoire ?
>
> **Questionnement 2**

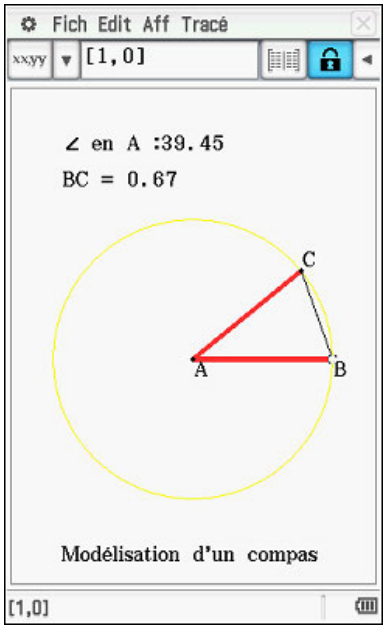
## La fonction aire

> Peut-on retrouver la réponse via l'analyse d'une fonction ? Quelle inconnue choisir ?
> Y-aura-t-il cohérence des réponses que l'on prenne l'angle d'ouverture comme paramètre ou la longueur d'ouverture du compas ?
>
> **Questionnement 3**

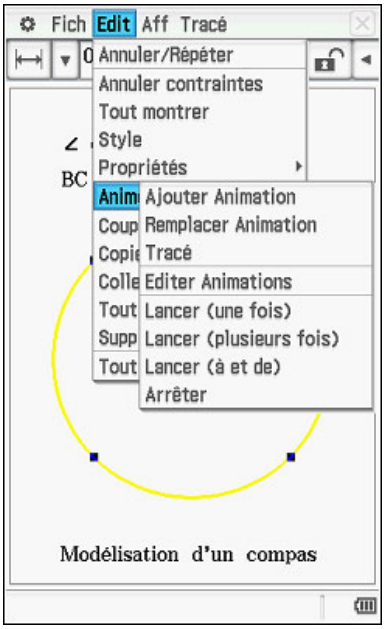
## Une analyse directe via la géométrie dynamique

***Lieu et tableau de valeurs.***

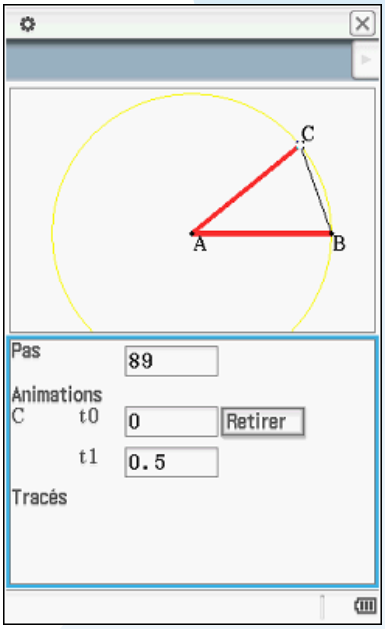
La géométrie dynamique du Classpad 400 alliant un module d'animation des figures et un tableur va nous permettre de trouver l'angle maximum sans avoir à effectuer quelque calcul que ce soit.




Capture 1.1




Capture 1.2




Capture 1.3

Capture 1.1 : Dessinons un modèle du compas. Un travail autour des *agrandissements/réductions* permettra de se convaincre que l'aire maximale recherchée ne dépend pas de la taille du compas. De ce fait, posons :

$$AB = 1$$

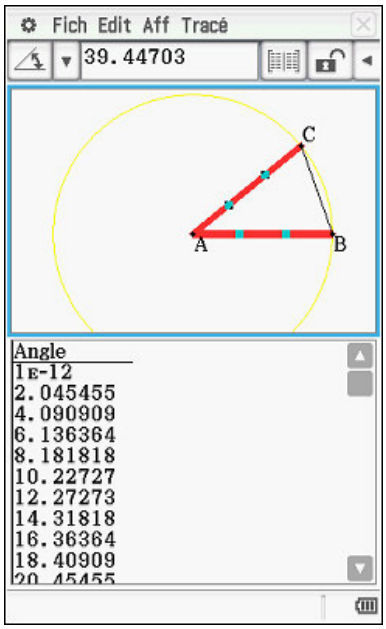
Et,

$$A(0;0)$$

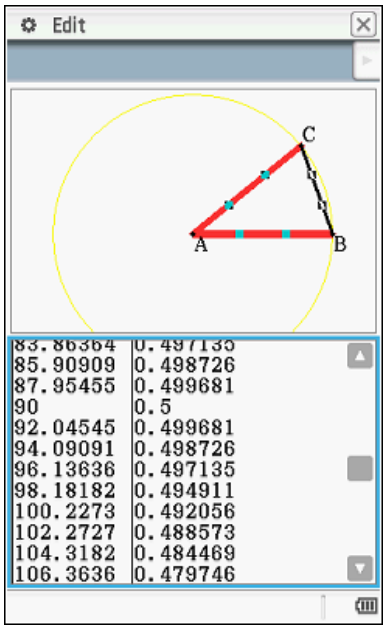
$$B(1;0)$$

Capture 1.2 : Le compas étant isocèle, il est inscrit dans le cercle de centre A et de rayon AB. Il nous suffit de créer une animation du point C sur ce cercle ainsi défini.

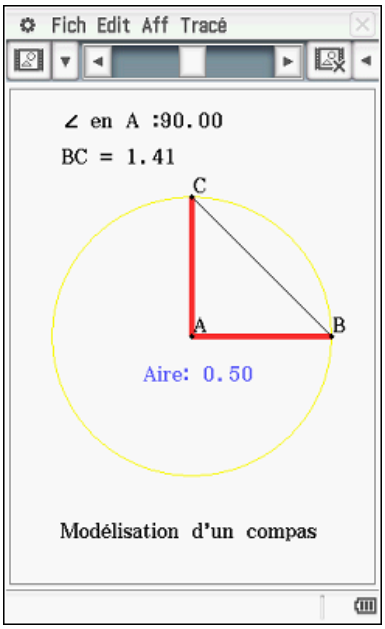
Capture 1.3 : On cherche une ouverture de compas. Donc, nous allons faire déplacer dans l'animation, le point C sur le demi-cercle précédent (par symétrie, inutile de faire un tour complet). Pour avoir des valeurs précises, un déplacement de 89 intervalles va nous permettre une vision précise du mouvement.




Capture 1.4




Capture 1.5




Capture 1.6

Capture 1.4 : En sélectionnant les deux segments [AB] et [AC], l'angle $\widehat{BAC}$ s'inscrit dans l'onglet supérieur de l'écran. Il suffit de cliquer sur l'icône *tableur* pour avoir une liste de valeurs correspondantes au déplacement du point C dans l'animation définie.

Capture 1.5 : En sélectionnant les trois segments du triangle ABC, l'aire apparait. De même, on peut afficher ses différentes valeurs possibles pour l'animation du point C. Un maximum semble atteint pour un angle de 90°.

Capture 1.6 : Un curseur permet de faire déplacer l'animation et ainsi de retrouver que l'aire semble maximale pour un triangle rectangle isocèle. Logiquement on retrouve :

Pour :

$$AB = 1$$

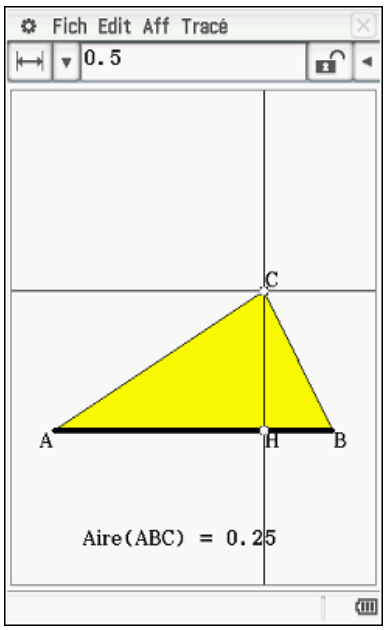
Une aire qui semble correspondre à :

$$\boldsymbol{Aire} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

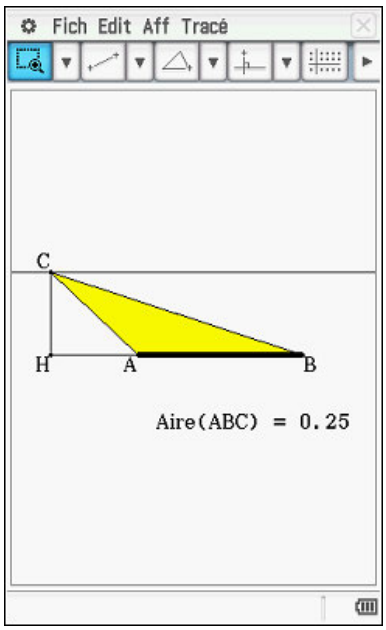
# Formule de l'aire et recherche de maximum

### *Analyse géométrique de la figure*

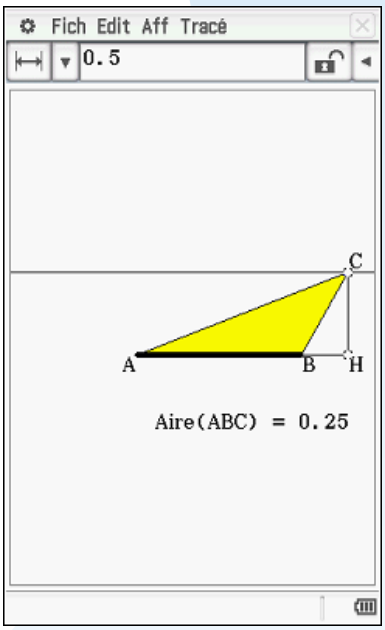
L'aire d'un triangle est donnée par une formule simple et pourtant difficile à intégrer dans l'esprit de chacun. Un travail sur la rupture de la représentation intellectuelle de cette formule est à envisager pour pallier les contraintes inexistantes dans la géométrie réelle.




Capture 2.1




Capture 2.2




Capture 2.3

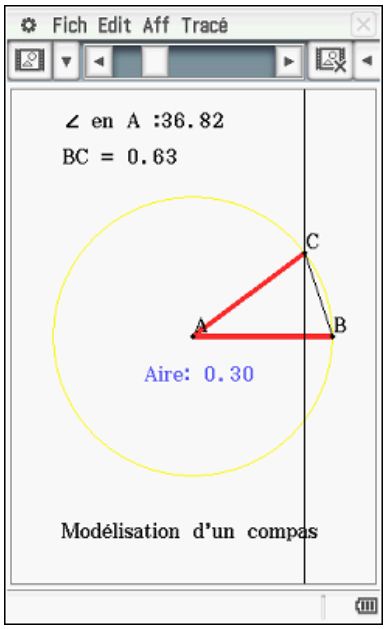
Capture 2.1 : Dessinons un triangle ABC et une parallèle à la base AB.
Soit [CH] la hauteur de ce triangle.

Capture 2.2 : Quelle que soit la position du point C sur la parallèle, l'aire ne change pas.

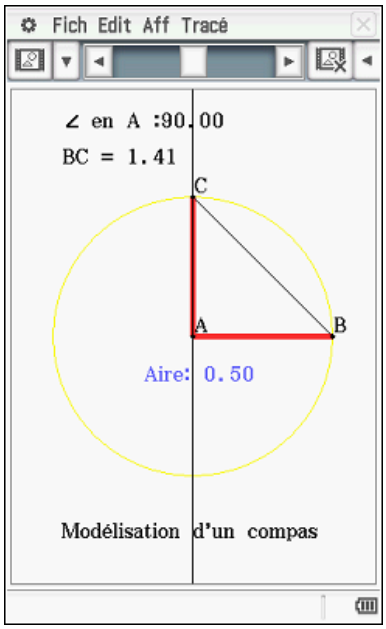
$$Aire = \frac{Base \times Hauteur}{2}$$

Capture 2.3 : Une évidence qu'il est souvent utile de rappeler.

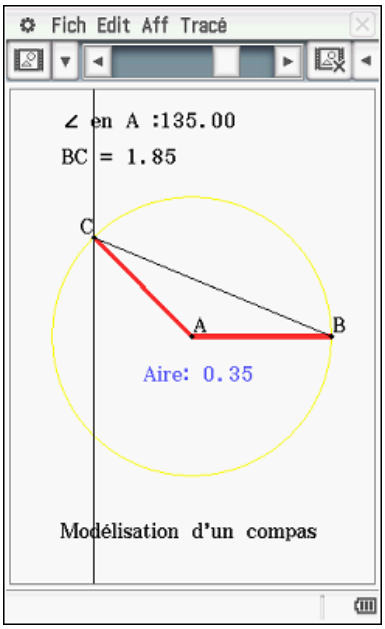
Ainsi, dans notre cas de compas, la base du triangle (cf. Capture 1.1) ne change pas. Il n'y a que la hauteur qui évolue. Pour trouver sans modéliser par du calcul littéral le problème, il suffit de rechercher la hauteur maximale que peut atteindre le triangle en se déplaçant sur un cercle.




Capture 2.4




Capture 2.5




Capture 2.6

Capture 2.4 : Sur notre modélisation du compas rajoutons la perpendiculaire à (AB) passant par le point C. Elle va nous représenter une hauteur au triangle.

Capture 2.5 : Un travail avec le curseur d'animation permet de se rendre compte que la hauteur est maximale lorsque qu'elle atteint la longueur d'un rayon du cercle.

Capture 2.6 : C'est-à-dire lorsque l'angle vaut 90°.

Un travail de rédaction permet de le prouver et ainsi d'avoir levé l'incertitude sur la conjecture précédente faite à l'aide d'un tableau de valeurs.

L'aire est maximale pour un triangle rectangle isocèle de côté 1 unité soit :

$$\boldsymbol{Aire = \frac{1}{2}}$$

On peut rapidement avec la propriété de Pythagore retrouver les caractéristiques complètes d'un tel compas :

$$\boldsymbol{Angle\ d'ouverture = 90°}$$

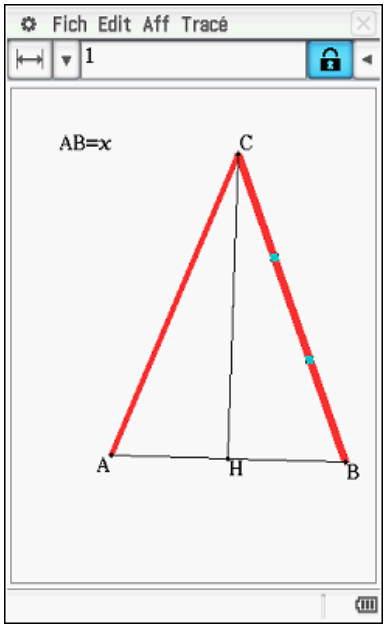
$$\boldsymbol{Longueur\ d'ouverture = \sqrt{1^2 + 1^2}}$$
$$\boldsymbol{Longueur\ d'ouverture = \sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{Aire\ maximale = \frac{1}{2} Unités\ d'aire}$$

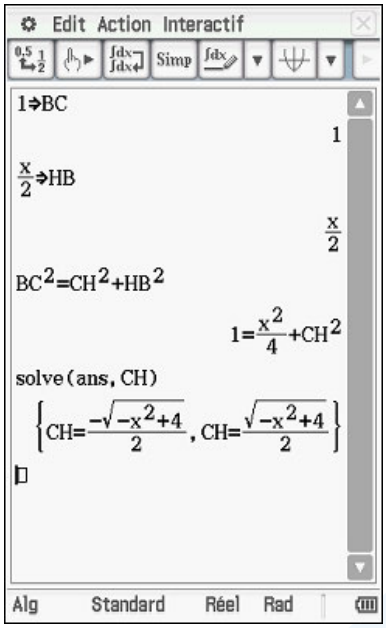
## Analyse fonctionnelle et recherche de maximum

Une démarche de résolution du problème par la recherche d'un maximum d'une fonction est possible. Nous allons le voir sous deux angles. L'aire que représente le compas peut être en fonction de l'angle d'ouverture ou en fonction de la longueur d'ouverture que représente le compas. Intéressons-nous à ce cas pour l'instant.

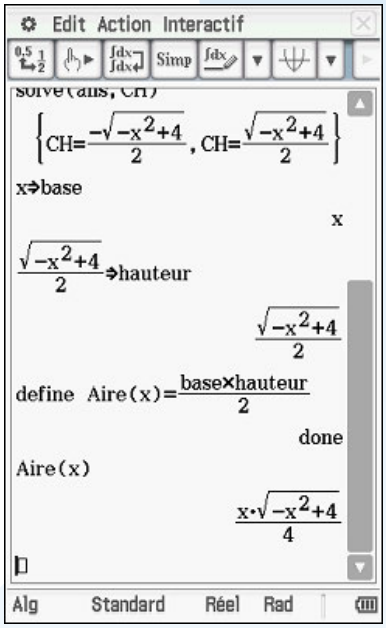
### *Démarche via la longueur d'ouverture*




Capture 3.1




Capture 3.2




Capture 2.3

Capture 3.1 : Dessinons un triangle ABC isocèle en C avec AC=BC=1 et posons H le pied de la hauteur à ce triangle.

Capture 3.2 : Comme BCH est un triangle rectangle en H, on a la possibilité d'utiliser la propriété de Pythagore. Notons qu'il est possible directement sur la calculatrice de résoudre l'équation qui en découle en fonction du paramètre $x$ que nous avons défini.

Capture 3.3 : Une fois que nous connaissons la hauteur du triangle en fonction de la longueur de sa base. Il est aisé de calculer l'aire adéquate. On trouve :

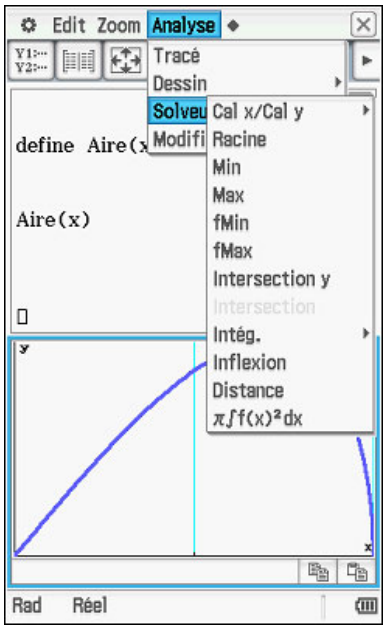
$$Aire(x) = \frac{Base \times hauteur}{2}$$

Soit,

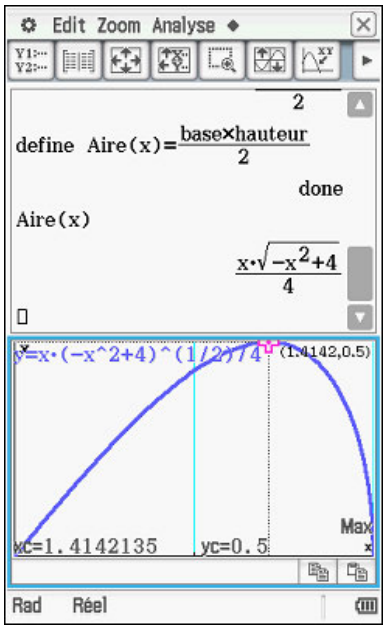
$$\boldsymbol{Aire(x) = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}}$$

Avec

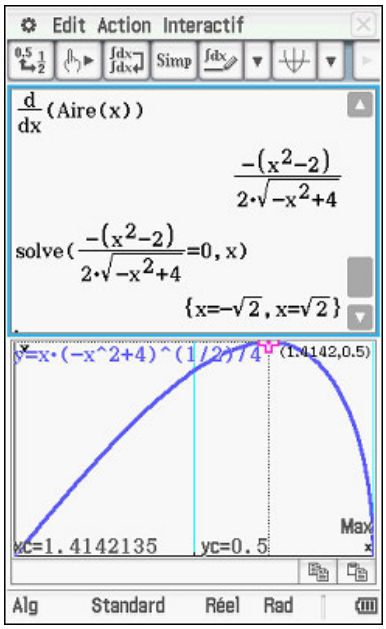
$$0 < x < 2$$




Capture 3.4




Capture 3.5




Capture 3.6

Capture 3.4 : Par un *glisser/déposer*, il est possible de faire afficher la courbe directement dans une fenêtre graphique sur l'écran de la calculatrice. Sans souci, il est alors possible de redimensionner la fenêtre pour optimiser la vue et de lui demander de résoudre graphiquement la recherche du maximum de la courbe.

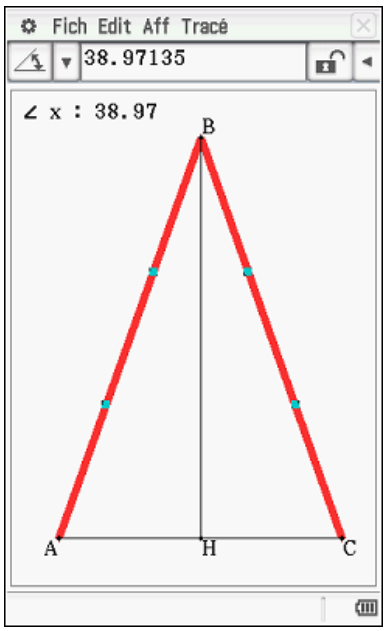
Capture 3.5 : On retrouve un maximum pour une aire de 0.5.

Capture 3.6 : Un travail autour de la dérivée de la fonction permet de retrouver les valeurs exactes.

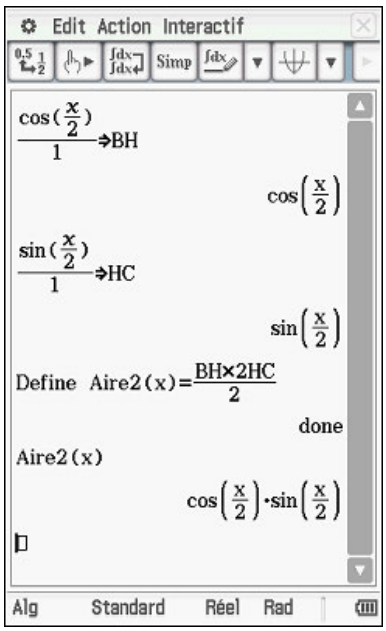
$$Aire(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{2}^2}}{4}$$
$$Aire(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{4}$$
$$Aire(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$$

***Démarche via l'angle d'ouverture***

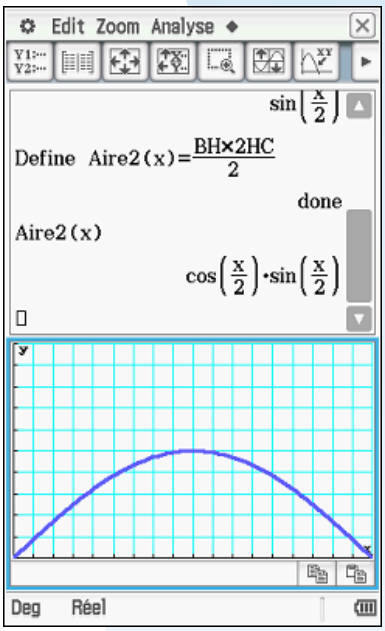
Dans cette méthode de résolution, l'angle au sommet du triangle isocèle sera notre variable.




Capture 3.7




Capture 3.8



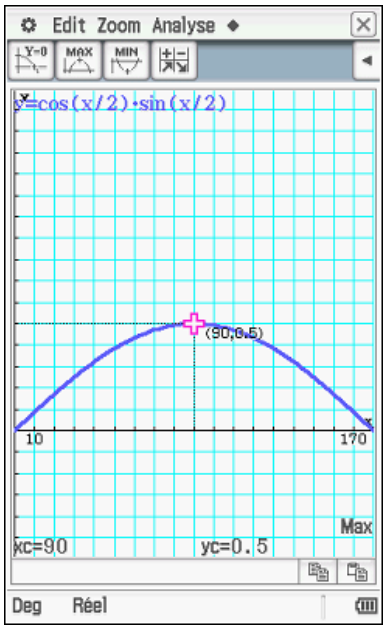

Capture 3.9

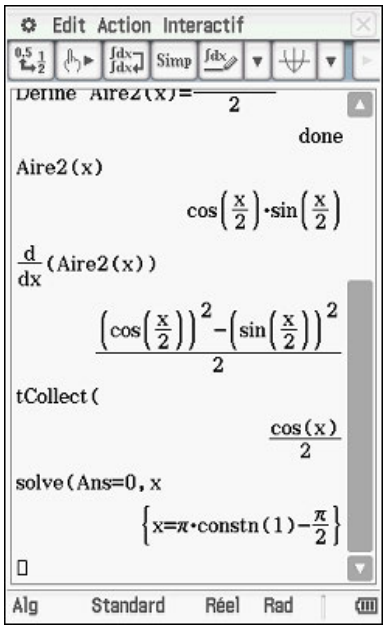
Capture 3.7 : Le compas sera modélisé maintenant par un triangle isocèle dont l'angle d'ouverture sera notre inconnue $x$.

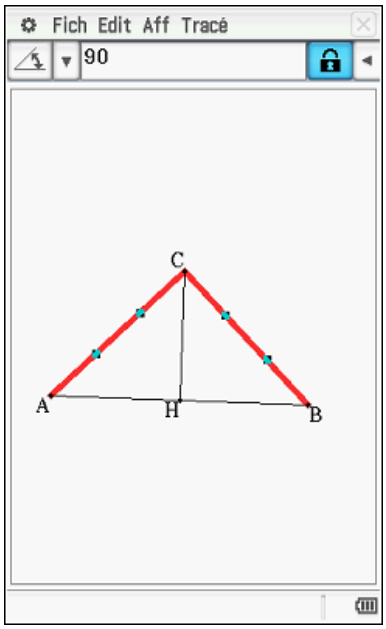
Capture 3.8 : Nous retrouvons grâce aux formules de trigonométrie dans *son demi-triangle rectangle associé (*formé par la hauteur du triangle isocèle) l'aire en fonction de l'angle au centre :

$$\boldsymbol{Aire(a) = \cos\left(\frac{a}{2}\right).\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Capture 3.9 : Fonction que nous pouvons représenter en partageant la fenêtre de la calculatrice.




Capture 3.10 Capture 3.11 Capture 3.12

Capture 3.10 : Il ne reste qu'à faire une recherche du maximum sur l'intervalle étudié (ici, [0 ;180] ).

Capture 3.11 : Notons que le calcul formel permet au travers du calcul de la dérivée de retrouver les réponses recherchées. Il sera intéressant de voir la bascule entre le mode *Degré* et le mode *Radian* en un simple clic au bas de l'écran.

Capture 3.12 : La géométrie dynamique associée à cette machine permet directement de sélectionner l'angle et de lui affecter les 90° trouvés.

# Notes personnelles

# Les trois dés

Encore un problème assez simple qui permet une mise en œuvre multiple et donc, des approches riches en enseignement :

> Lorsqu'on lance trois dés et qu'on s'intéresse à leur somme, pourquoi le 10 semble sortir plus souvent que le 9 alors que leur somme est associée pour chacun à six additions différentes ?
>
> **Questionnement de base**

## Algorithme et découverte de toutes les combinaisons

> Une utilisation des boucles dans un algorithme permettra de lever cette incohérence historique.
>
> **Questionnement 1**

## Utilisation du tableur et probabilité

> En utilisant le tableur nous allons classer les différentes combinaisons pour répondre à la question en levant l'ambiguïté.
>
> **Questionnement 2**

## Algorithmique et expérimentation

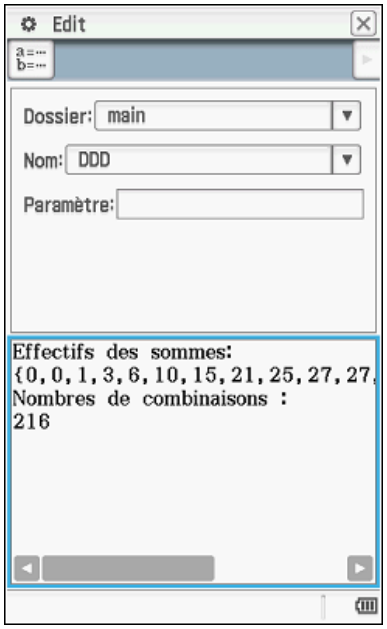
> Alors que la théorie semble acceptée, rien n'empêche de retrouver ces résultats par une expérimentation où un grand nombre de lancers des dés semble nécessaire.
>
> **Questionnement 3**

# Questionnement 1, combinaisons.

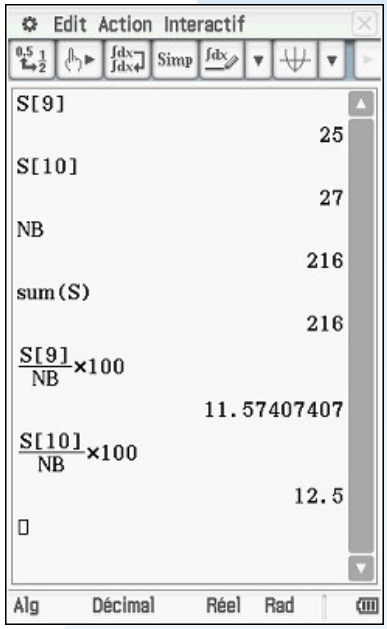
### *Utilisation de la boucle FOR*

Dans le mode *programmation*, il est facile de faire recenser les différents cas de ces trois dés. L'imbrication de plusieurs boucles FOR va nous y aider.

Capture 1.1




Capture 1.2




Capture 1.3

Capture 1.1 : L'utilisation d'une *liste* (ici, S) permet de comptabiliser directement les sommes des lancers des dés. Les boucles FOR sont rapides et permettent de ne pas avoir besoin de recenser les différents cas. Bien-entendu rien ne nous empêche d'utiliser plusieurs listes pour faire apparaitre les données utilisées dans ce recensement.

Capture 1.2 : On trouve 216 combinaisons des 3 dés. Résultat évident que nous aurions pu retrouver directement :

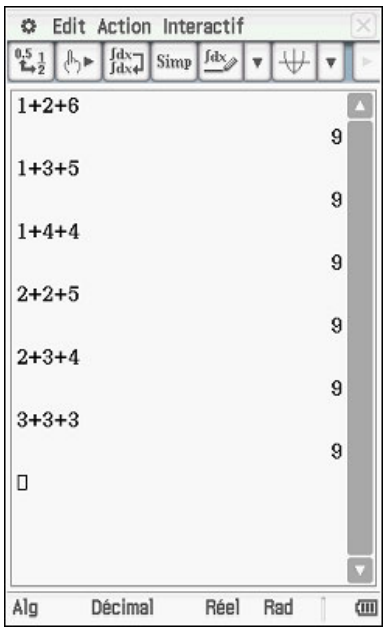
$$\mathbf{6^3 = 216}$$

Il est à noter que le nombre de combinaisons pour faire une somme de 9 est de 25 alors que pour un 10 on en a deux de plus. Il semble alors évident que la probabilité d'avoir un 10 sera légèrement supérieure à celle d'obtenir un 9.

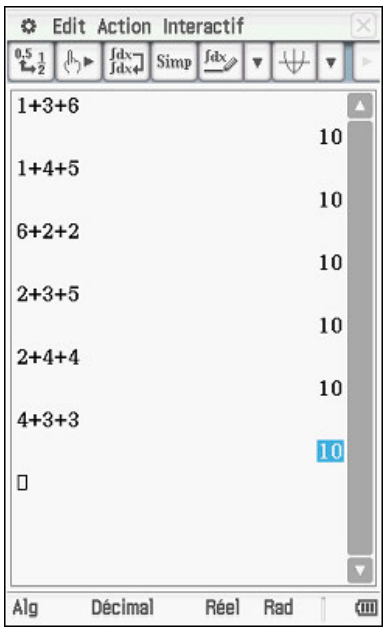
Capture 1.3 : Notons qu'après l'exécution d'un programme, les données utilisées sont disponibles dans le mode principale de la calculatrice.
Si on pose S la variable aléatoire représentant la somme on trouve :

$$\boldsymbol{P(S = 9) = \frac{25}{216} \cong 11,6\%}$$

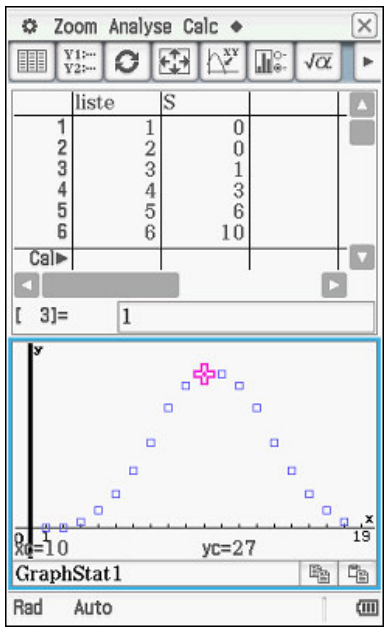
$$\boldsymbol{P(S = 10) = \frac{27}{216} \cong 12,5\%}$$




Capture 1.4




Capture 1.5




Capture 1.6

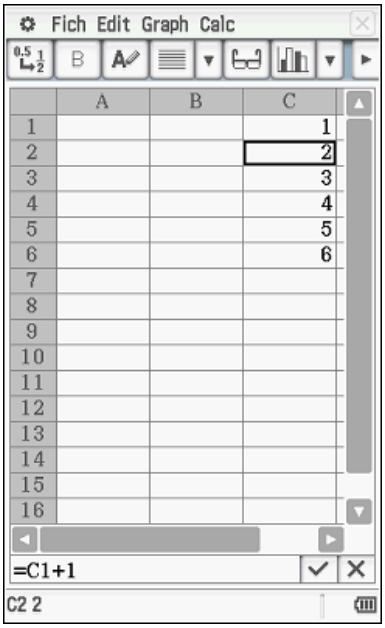
Capture 1.4 : Le problème historique vient du fait qu'il y ait 6 possibilités de faire la somme recherchée autant pour le 9 que pour le 10. Malheureusement, ce raisonnement ne tient pas compte des combinaisons. Alors, qu'il semble que les dés soient indiscernables en les lançant, ce n'est pas le cas et, la suite du document nous le montrera via une expérimentation.

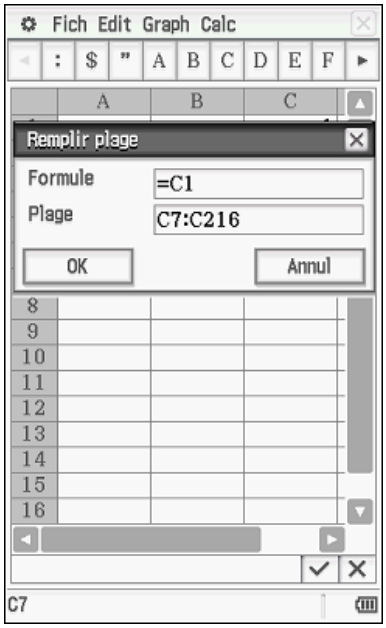
Capture 1.6 : Le mode *suite* de la calculatrice peut lui aussi récupérer la suite créée par le programme précédent (la source est disponible à la racine : *main/S*). Il s'agit d'une liste représentant des effectifs. Rien ne nous empêche d'en faire l'interprétation graphique (ici, en nuage de points).

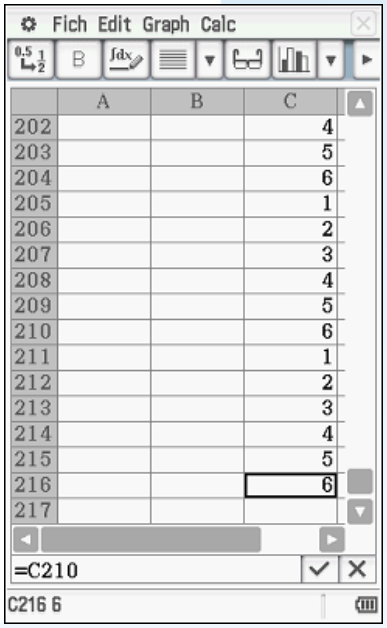
# Questionnement 2, tableur et probabilité.

### *Calcul des probabilités et mise en place d'un visuel*

La boucle FOR utilisée précédemment en itération permet rapidement de conclure et de calculer les probabilités adéquates. Par contre, elle a l'inconvénient de laisser perplexes les plus sceptiques.
Du coup, via l'utilisation du tableur, nous allons pouvoir réellement trier et classer toutes les combinaisons possibles et, faire apparaitre un arbre des possibles comme sur le papier.




Capture 2.1 Capture 2.2 Capture 2.3

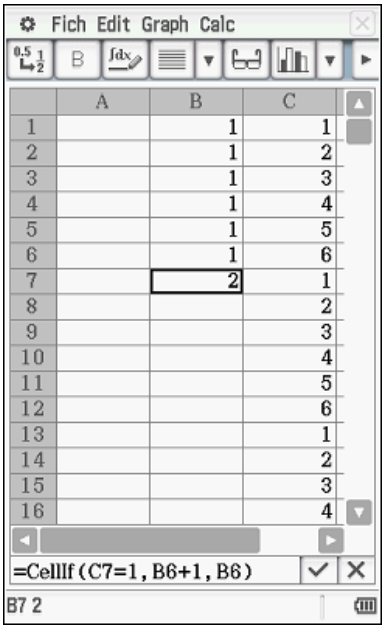
Capture 2.1 : La colonne C représentera le troisième dé. Proposons nous de lui faire dérouler ses 6 faces l'une après l'autre.

Capture 2.2 : La fonction *Remplir plage* permet d'avoir directement une formule *copier/coller* dans les 216 lignes de ce tableur. Comme le dé n'a que 6 faces. A la case C7 nous devons écrire :

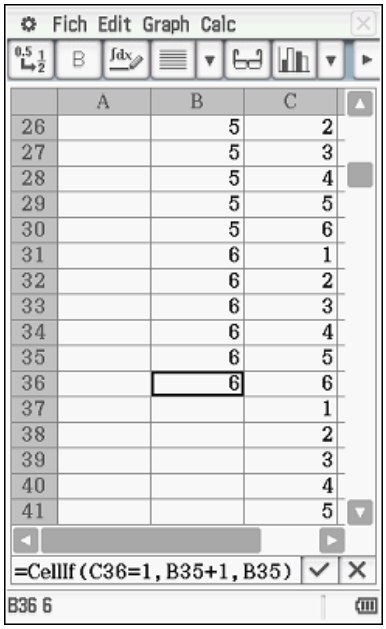
$$\boldsymbol{C7 = C1}$$

Et, remplir les lignes avec cette formule qui sera incrémentée correctement.

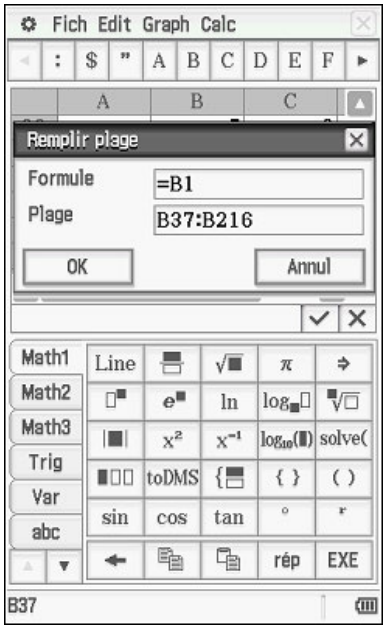
Capture 2.3 : En descendant dans le tableau, on retrouve que la 216$^{e}$ ligne finit bien par un 6.




Capture 2.3




Capture 2.4




Capture 2.5

Capture 2.3 : La colonne B représentera le second dé. Nous avons découvert que l'ordre influence les résultats. Pour en convaincre une classe, il suffit de lancer trois dés de couleurs différentes. Si le troisième dé est un 1 c'est que nous avons changé de face pour le second dé. Le classement devient naturel et on obtient une corrélation avec les boucles FOR imbriquées. La formule utilisée est :

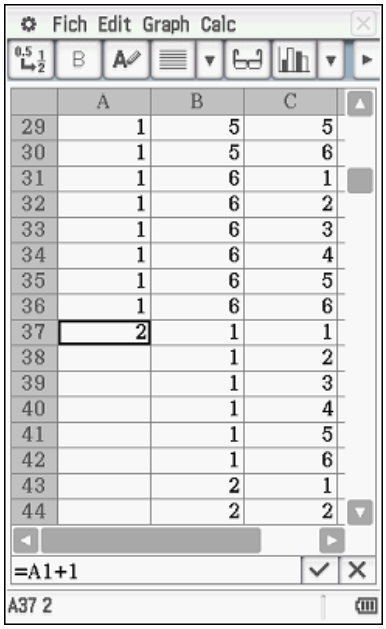
$$= \boldsymbol{CellIf}(\boldsymbol{C7} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{B6} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{B6})$$

Capture 2.4 : La fonction Remplir plage permet de la recopier jusqu'à la ligne 36. Attention, car le dé n'a que 6 faces. A la 37$^{e}$ ligne, on recommence :

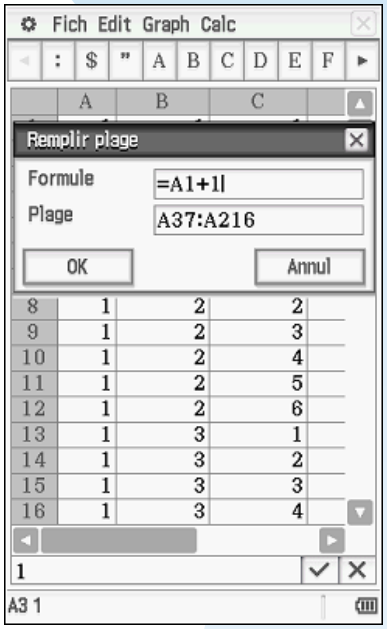
$$\boldsymbol{B37} = \boldsymbol{B1}$$

Capture 2.5 : De nouveau, on peut remplir les lignes restantes avec cette formule.

Capture 2.6




Capture 2.7




Capture 2.8

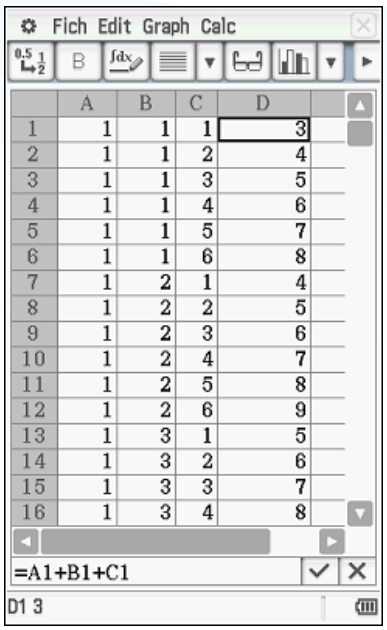
Capture 2.6 : La colonne A représentera le premier dé. Il va garder ces faces 36 fois pour chacune de leur valeur.

$$A1 = 1$$

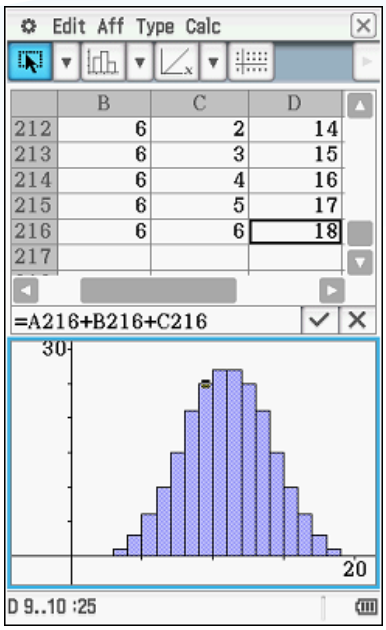
Capture 2.7 : Du coup, à la 37e ligne, on change de face.

$$A37 = A1 + 1$$

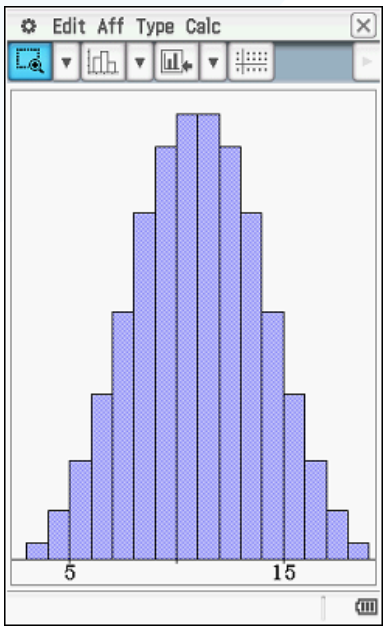
Capture 2.8 : On n'a qu'à faire de même jusqu'au bas du tableau.




Capture 2.9




Capture 2.10



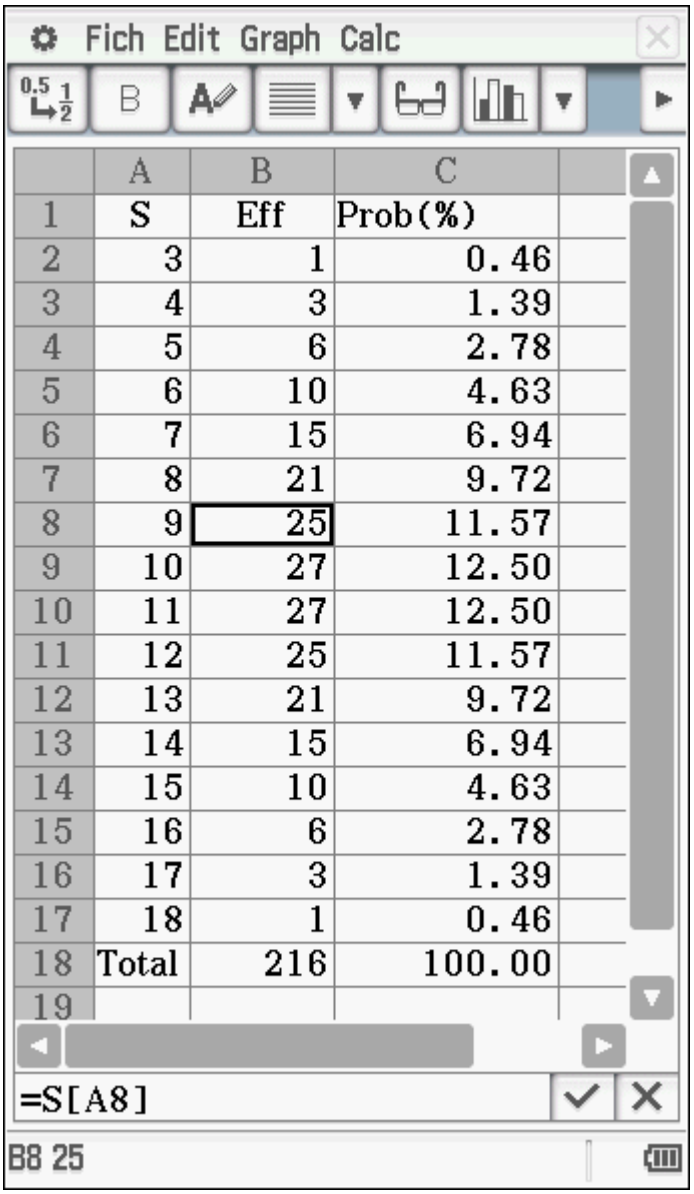

Capture 2.11

Capture 2.9 : La colonne D va représenter la somme des trois dés :

$$\boldsymbol{D1 = A1 + B1 + C1}$$

Capture 2.10 : En la sélectionnant, on peut afficher un diagramme permettant de retrouver les effectifs pour chaque somme.

Capture 2.11 : Et, y lire les différentes probabilités que nous pouvons recenser dans le tableau suivant :




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | S | Eff | Prob(%) |
| 2 | 3 | 1 | 0.46 |
| 3 | 4 | 3 | 1.39 |
| 4 | 5 | 6 | 2.78 |
| 5 | 6 | 10 | 4.63 |
| 6 | 7 | 15 | 6.94 |
| 7 | 8 | 21 | 9.72 |
| 8 | 9 | 25 | 11.57 |
| 9 | 10 | 27 | 12.50 |
| 10 | 11 | 27 | 12.50 |
| 11 | 12 | 25 | 11.57 |
| 12 | 13 | 21 | 9.72 |
| 13 | 14 | 15 | 6.94 |
| 14 | 15 | 10 | 4.63 |
| 15 | 16 | 6 | 2.78 |
| 16 | 17 | 3 | 1.39 |
| 17 | 18 | 1 | 0.46 |
| 18 | Total | 216 | 100.00 |
| 19 | | | |

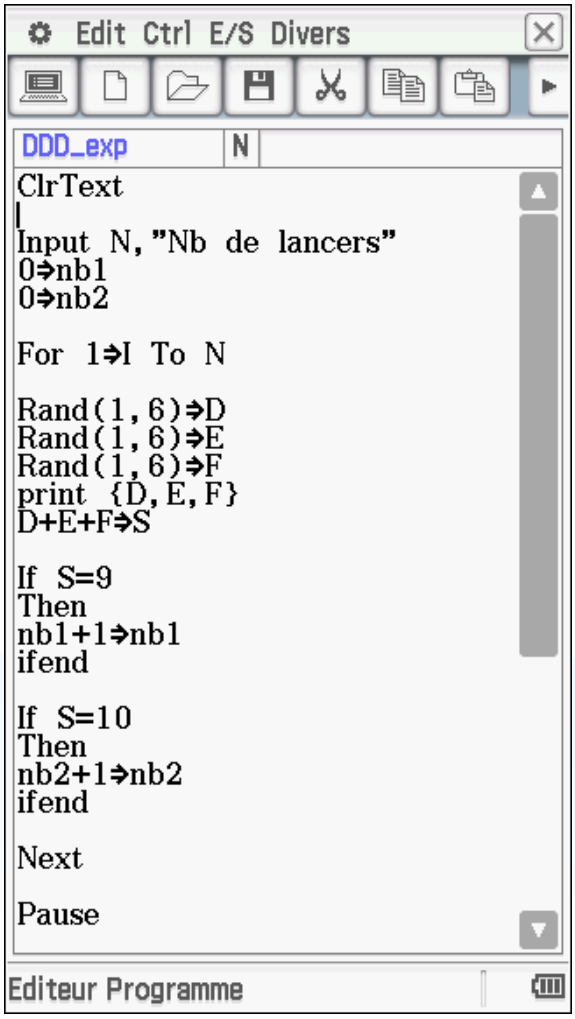
Capture 2.12

Capture 2.12 : Notons qu'il est aussi possible de réutiliser la suite S fabriquée par l'algorithme précédent.

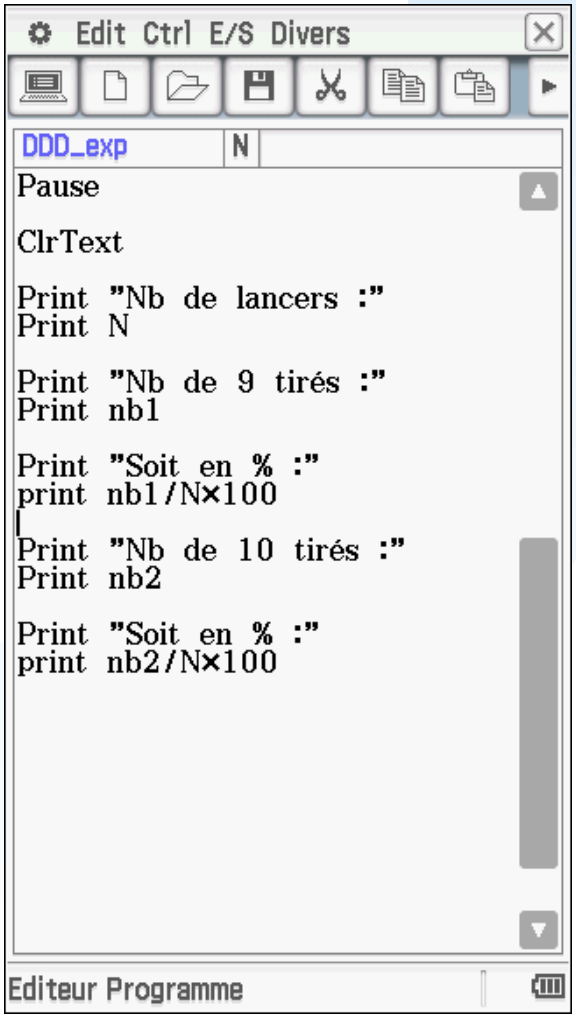
## Questionnement 3, expérimentation

### *Lançons les dés*

Au lieu de chercher les différents événements possibles que définissent ce problème, il est aussi simple d'envisager de tenter un grand nombre de fois cette expérience aléatoire (bien-entendu, rien ne nous empêche d'envisager la recherche d'un intervalle de confiance pour choisir le bon échantillon).



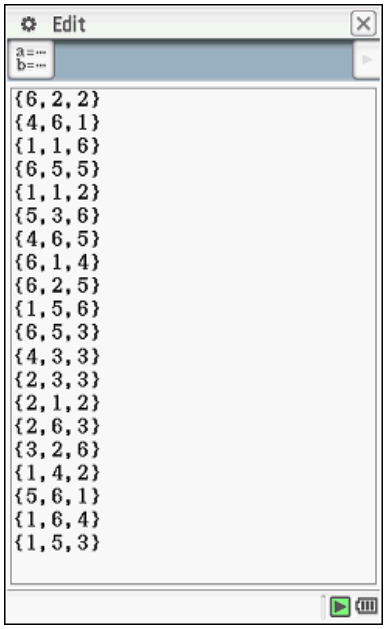

Capture 3.1



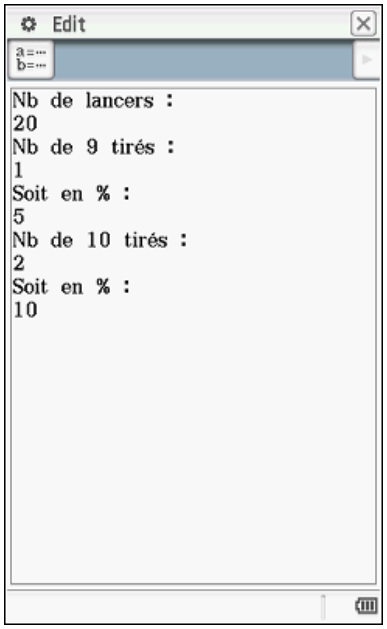

Capture 3.2

Capture 3.1 : Le programme pour faire cette simulation se déroule en deux temps. Dans cette première capture d'écran, on lance N lancers de trois dés. Et, on incrémente deux variables pour compter les 9 et les 10.

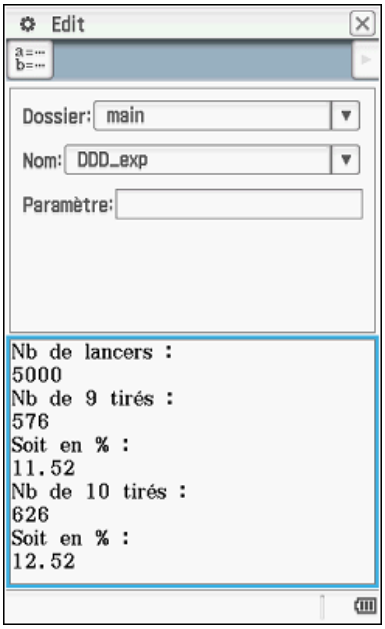
Capture 3.2 : Enfin, la fonction *Pause* permet de stopper l'action avant d'afficher le bilan des opérations effectuées.




Capture 3.3




Capture 3.4




Capture 3.5

Capture 3.3 : Exécutons le programme pour 20 lancers.
Lorsque les tirages sont effectués, la pause s'actionne et il faut cliquer sur le bouton vert pour finir le programme.

Capture 3.4 : On trouve des réponses bien loin de la théorie. Un grand nombre de lancers sera nécessaire pour que l'expérience soit en accord avec la probabilité décrite.

Capture 3.5 : Sans surprise pour 5000 tirages, on retrouve des valeurs proches des valeurs recherchées. L'expérience est concluante et donc :

**Il est nécessaire dans un tirage de 3 dés de ne pas négliger l'ordre des dés.**

# Notes personnelles

# L'échiquier, seuil et algorithme

Le problème de l'échiquier est un classique en mathématiques. Selon la légende, il a été proposé par l'inventeur du jeu d'échec pour se faire récompenser de sa trouvaille. Par contre, rappelons simplement qu'il est demandé que l'on pose un grain de riz sur la première case de l'échiquier et qu'on double les grains posés en avançant de case en case.

## Une analyse décimale pour une suite géométrique

Au bout de la 64$^{e}$ case, quelle est la somme de grains de riz posée ?
Notons qu'avec environ une centaine de milliers de grains de riz on a une masse de 3 Kg.

**Questionnement 1**

## Une analyse algorithmique, une question de seuil

Un travail autour de la programmation peut-être envisagé.
Une idée d'algorithme et de seuil peut convenir aux questionnements suivants :

- Peut-on retrouver la réponse précédente en gérant un algorithme ?
- Pour quelle case, la somme des grains de riz posée dépasse-t-elle la production mondiale annuelle ?
  *(Notons, une production d'environ 700 millions de tonnes pour les années à venir).*

**Questionnement 2**

## Somme d'une suite géométrique

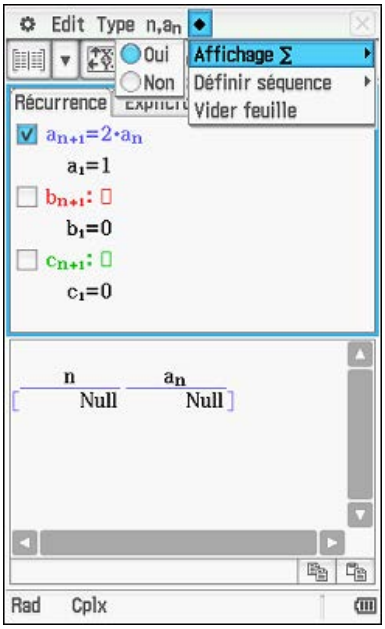
Pourrions-nous trouver directement la réponse du questionnement précédent en utilisant une résolution d'équation ?

**Questionnement 3**

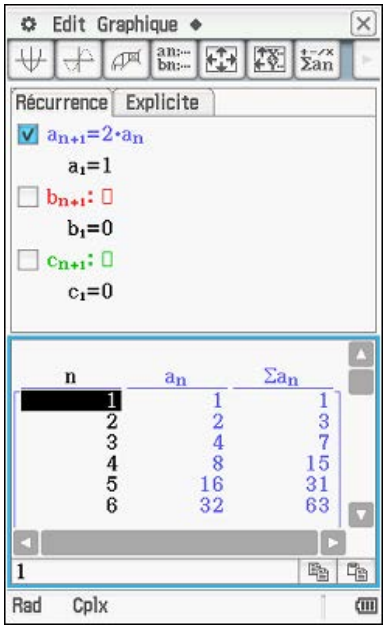
# Echiquier, seuil et algorithme, questionnement 1

### *Un calcul direct utilisant le mode Suite*

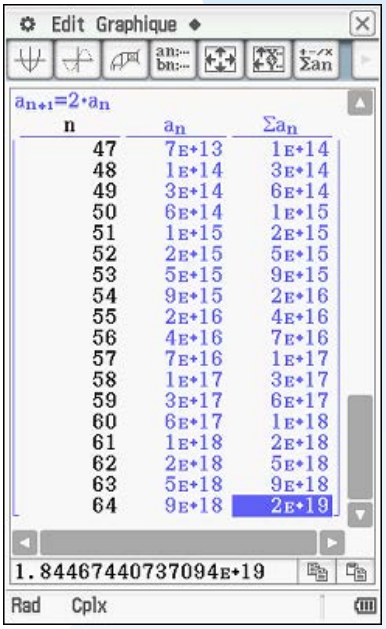
Dans un premier temps, le *mode suite* de la calculatrice permet de régler le problème historique en très peu de manipulations, comme nous le démontrent les captures d'écran suivantes :




Capture 1.1




Capture 1.2




Capture 1.3

Capture 1.1 : Définissons la suite $(a_n)$ répondant au problème, comme suit :

$$a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_1 = 1$$

Puis, demandons l'affichage de la somme des valeurs calculées.

Capture 1.2 : Lançons le calcul des 64 premiers termes de cette suite.

Capture 1.3 : On trouve un nombre de grains de riz posé bien pharaonique :

$$\mathbf{1,84 \times 10^{19}}$$

*A savoir : le poids des grains de riz sur l'échiquier dépasse les 550 milliards de tonnes !*

# Echiquier, seuil et algorithme, questionnement 2

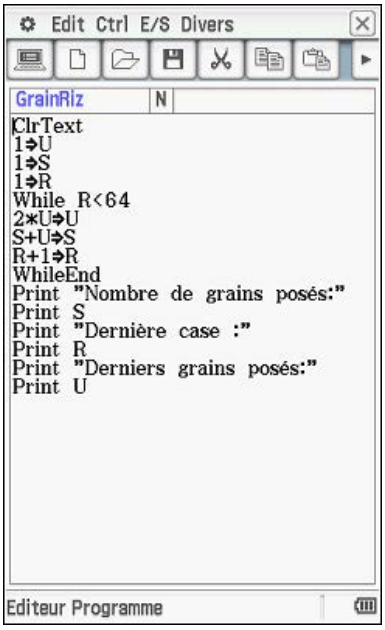
## *Un travail sous la forme d'algorithmes*

### Algorithme 1 : les 64 cases

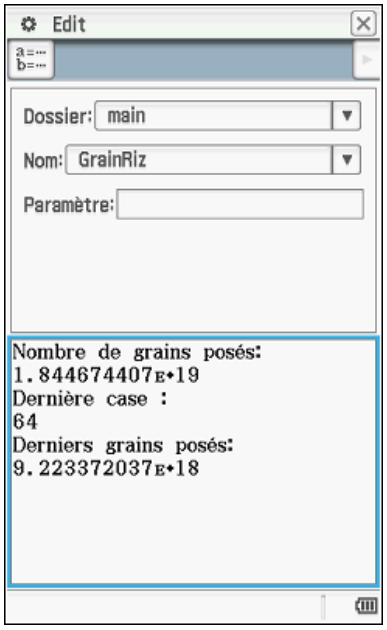
```
U=1
SOMME=1
RANG=1

Tant que        rang<64:

                U=U*2+U
                SOMME=SOMME+U
                RANG=RANG+1

Fin de condition

Afficher  U
Afficher  SOMME
```

Capture 2.0

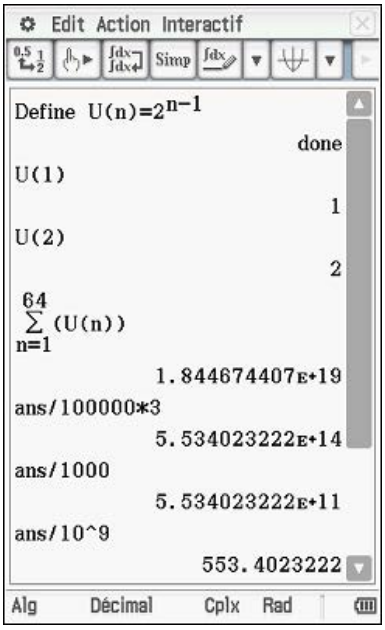
Voici un premier algorithme permettant de répondre à la question initiale à savoir, le nombre de grains de riz posé sur un échiquier complet. Il permet entre autre de s'imprégner l'idée de la boucle *Tant que.*




Capture 2.1




Capture 2.2




Capture 2.3

Capture 2.1 : Dans le mode *Programme*, nous pouvons retranscrire l'algorithme précédent. L'usage de la boucle *While* permet de stopper le calcul de cette suite à la 64$^{e}$ case.

Capture 2.2 : Lançons le programme, on retrouve le nombre de grains de riz précédent. Un test est utile en l'affichage du rang (*Print R*) afin de vérifier que notre programme s'arrête à la case voulue.

Capture 2.3 : Le mode *principale* de la calculatrice permet une grande souplesse. Ainsi, il est possible de répondre directement à la question historique et, de faire visualiser l'idée de somme. L'algorithme n'étant qu'une façon mécanisée de la retrouver.

$$\sum_{R=1}^{64} U_n = 1,84 \times 10^{19}$$

**Notons que 3Kg de riz représentent environ 100000 grains.**

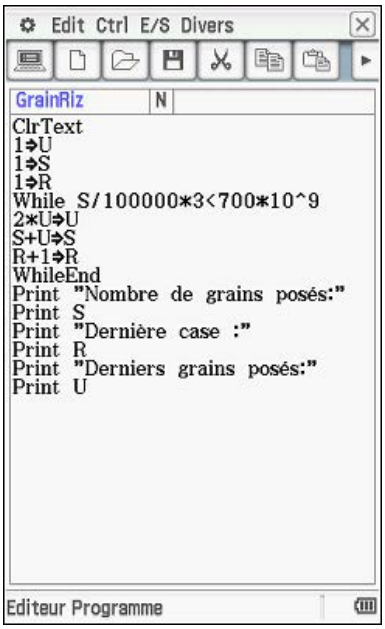
*Ainsi le poids des grains de riz sur l'échiquier dépasse les 550 milliards de tonnes !*

**Algorithme 2 : un travail de seuil**

```
U=1
SOMME=1
RANG=1

Tant que    SOMME/100000*3<700*10^9 :

                U=U*2+U
                SOMME=SOMME+U
                RANG=RANG+1

Fin de condition

Afficher  U
Afficher  SOMME
```

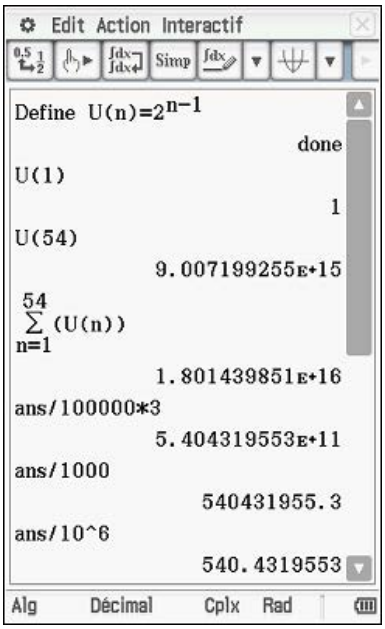
Capture 2.0bis

Voici un second algorithme qui permet de parler de seuil et d'arrêter de rajouter des grains de riz lorsqu'une condition est vérifiée.




Capture 2.4

Capture 2.5




Capture 2.6

Capture 2.4 : Dans ce programme seule la condition change. Il est donc, aisé de ne transformer qu'une ligne et garder le programme précédent.

Notons que S représente la somme de grains de riz donc :

Un kilo de riz sera donné par :

$$\frac{S}{100000} \times 3$$

700 millions de tonnes de riz (une production annuelle et mondiale à venir) en Kg :

$$700 \times 10^6 \times 1000 = 700 \times 10^9$$

Capture 2.5 : Il suffit de lancer le programme.
On trouve qu'à la 55$^e$ case, la production annuelle est dépassée !

Capture 2.6 : Un retour par le mode *principal* permet de vérifier le calcul.

*Dès la 55$^e$ case, la production mondiale est dépassée …*

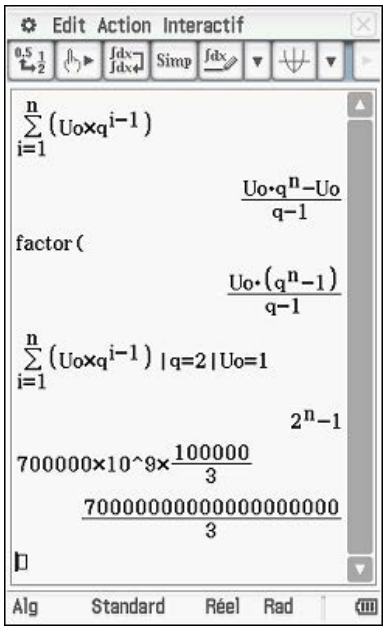
*Il reste pourtant un grand nombre de cases et donc,*
*ce problème pose bien un souci historique qui est encore d'actualité.*

# Echiquier, équation, questionnement 3

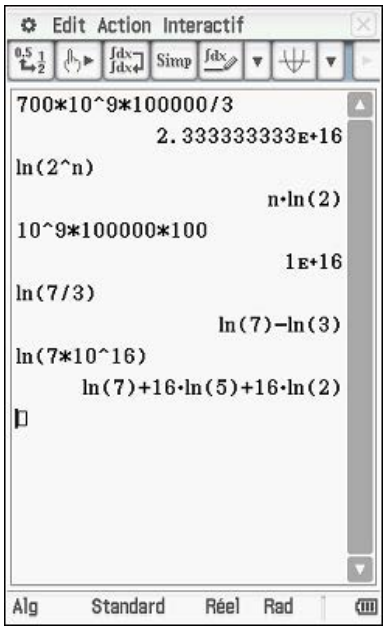
### *Résolution d'équation*

Il est possible d'envisager directement ce problème sans avoir à calculer les sommes engendrées par la suite modélisant le problème.

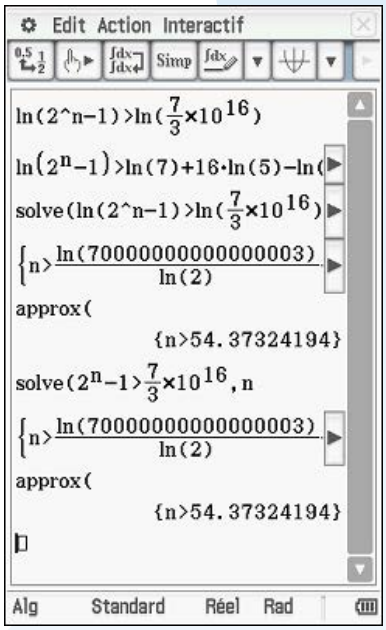
Ainsi, recherchons pour quelle valeur de n, la somme des grains de riz dépasse en poids la production mondiale.




Capture 3.1




Capture 3.2




Capture 3.3

Capture 3.1 : Le mode principal a un calcul formel bien performant. Il est possible de retrouver sans difficulté la formule permettant d'obtenir la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} U_1 \times q^{i-1} = \frac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Dans notre cas :

$$q = 2$$

$$U_1 = 1$$

On trouve que pour la n[ième] case, il y aura $\mathbf{2^n - 1}$ grains de riz.

Capture 3.2 : Nous trouvons aussi les propriétés de la fonction $ln(x)$ :

$$\ln(2^n) = nln(2)$$

Et,

$$\ln\left(\frac{7}{3}\right) = ln(7) - \ln(3)$$

Capture 3.3 : Il est dès lors possible de trouver le numéro de la case permettant de dépasser la production mondiale :

$$2^n - 1 > \frac{7}{3} \times 10^{16}$$

La fonction *solve*() donne une solution que la partie algorithmique nous avait déjà fourni, à savoir :

$$\boldsymbol{n > 54,37}$$

Solution que nous pouvons envisager grâce à la fonction $ln$ :

$$2^n - 1 > \frac{7}{3} \times 10^{16}$$

$$2^n > \frac{7}{3} \times 10^{16} + 1$$

$$nln(2) > \ln\left(\frac{7}{3} \times 10^{16} + 1\right)$$

$$\boldsymbol{n > \frac{\ln\left(\frac{7}{3} \times 10^{16} + 1\right)}{\ln(2)}}$$

**La case 55 sera le maximum mondialement possible …**

# Notes personnelles

# Courbe exponentielle, point par point

L'introduction de la fonction exponentielle permet quelques réflexions pédagogiquement intéressantes.

Comment tracer la courbe représentative d'une fonction de type exponentielle passant par deux points donnés ?

**Questionnement de base**

## Moyennes arithmétiques et géométriques

Il est facile de calculer quelques valeurs d'une suite géométrique ($U_n$) de raison 2 et de terme initial $U_0$=1.
Mais, comment faire pour approximer une valeur intermédiaire ?

**Questionnement 1**

## Algorithme et introduction

On veut dessiner point par point la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f(x) = 2^x$$

alors que la notion de fonctions puissances ou exponentielles n'est pas encore introduite.

Comment passer de quelques valeurs discrètes à la courbe complète ?

Pourrait-on trouver une méthode permettant de retrouver l'image de n'importe quelle valeur $x_0$ en n'utilisant que des antécédents entiers ?

**Questionnement 2**

# Questionnement 1, évolution exponentielle

### *Le cas discret*

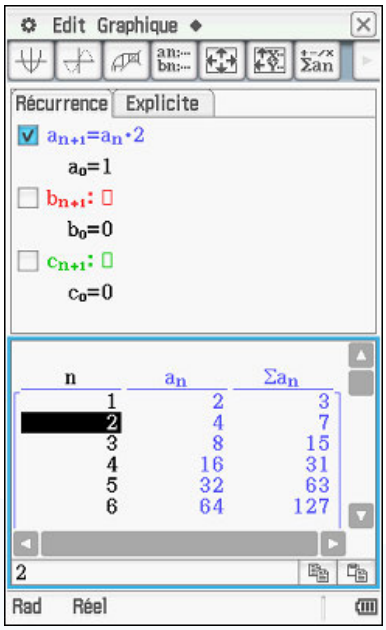
Un énoncé classique consiste à imaginer une population qui double son effectif chaque jour qui passe.

Si on pose n le nombre de jours écoulés. Nous pouvons sans souci calculer la taille de la population en fonction de n, on trouve une suite géométrique telle que par exemple :

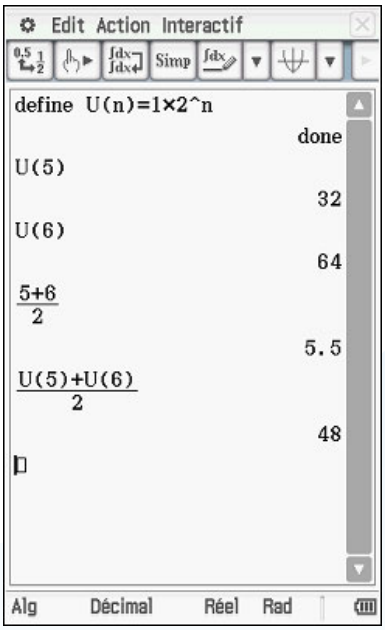
$$U_0 = 1$$
$$U_n = U_{n-1} \times 2$$

Par contre, comment estimer la taille de la population à la mi-journée ?

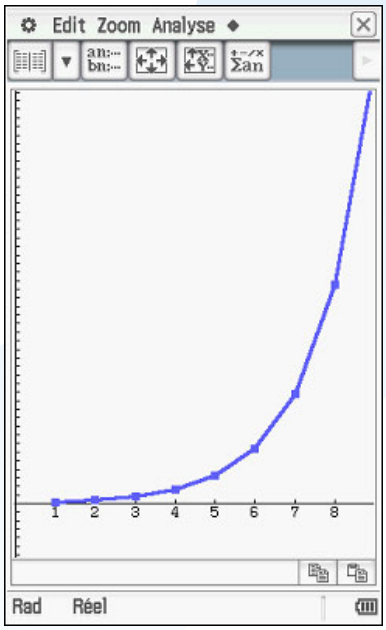
**Cherchons par exemple, l'estimation de la population à la mi-journée du 5e jour ?**




Capture 1.1




Capture 1.2



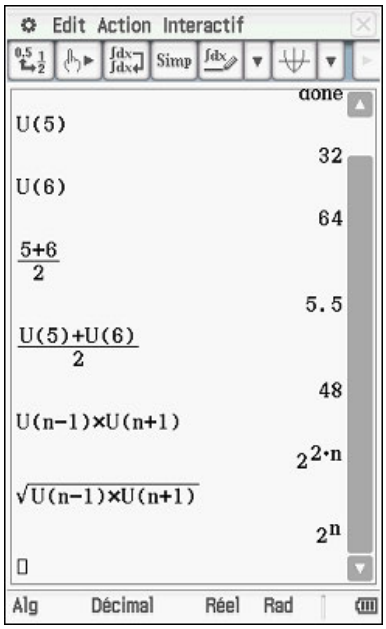

Capture 1.3

Capture 1.1 : Le mode *suite* donne directement les informations utiles à savoir :

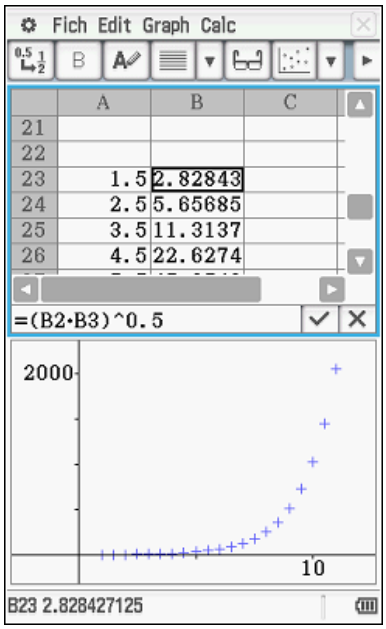
$$U_5 = 32$$
$$U_6 = 64$$

Capture 1.2 : Une première approche serait d'imaginer la moyenne des valeurs et d'estimer la population à 48.

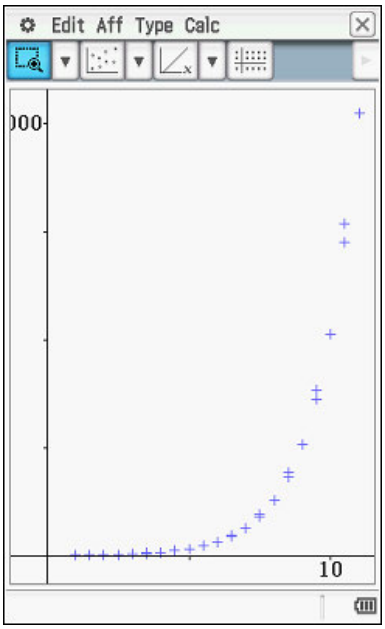
Capture 1.3 : Par contre, une analyse rapide de la représentation en ligne brisée de cette évolution permet de constater que le milieu d'un segment n'est pas précis pour des *n* assez grands.




Capture 1.4




Capture 1.5




Capture 1.6

Capture 1.4 : **La moyenne arithmétique des abscisses correspond à la moyenne géométrique des ordonnées.**

Ainsi si on veut calculer une valeur intermédiaire pour un n qui ne serait plus un nombre entier comme dans la suite de départ, il suffit d'associer ces deux moyennes.

On trouve pour n=5.5 :

$$n = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

$$\boldsymbol{U = \sqrt{32 \times 64} \cong 45,25} \; et \; non \; 48$$

Capture 1.5 : Le mode Tableur permet de faire ces calculs intermédiaires et de les représenter graphiquement. Ainsi, pour des valeurs entières initiales, nous avons la possibilité de trouver leurs valeurs moyennes. La représentation en nuage de points permet une représentation *harmonieuse* que nous ne retrouvons pas dans la capture suivante.

Capture 1.6 : Voici la représentation graphique en nuage de points des 10 premiers termes avec les deux méthodes. La moyenne arithmétique semble s'éloigner de la représentation voulue.

Pour une valeur approximée de 10,5, on trouve :

$$\frac{U_{10} + U_{11}}{2} = 1536$$

Alors que :

$$\boldsymbol{\sqrt{U_{10} \times U_{11}} \cong 1448}$$

## Questionnement 2, algorithme de construction

### *Représentation point par point*

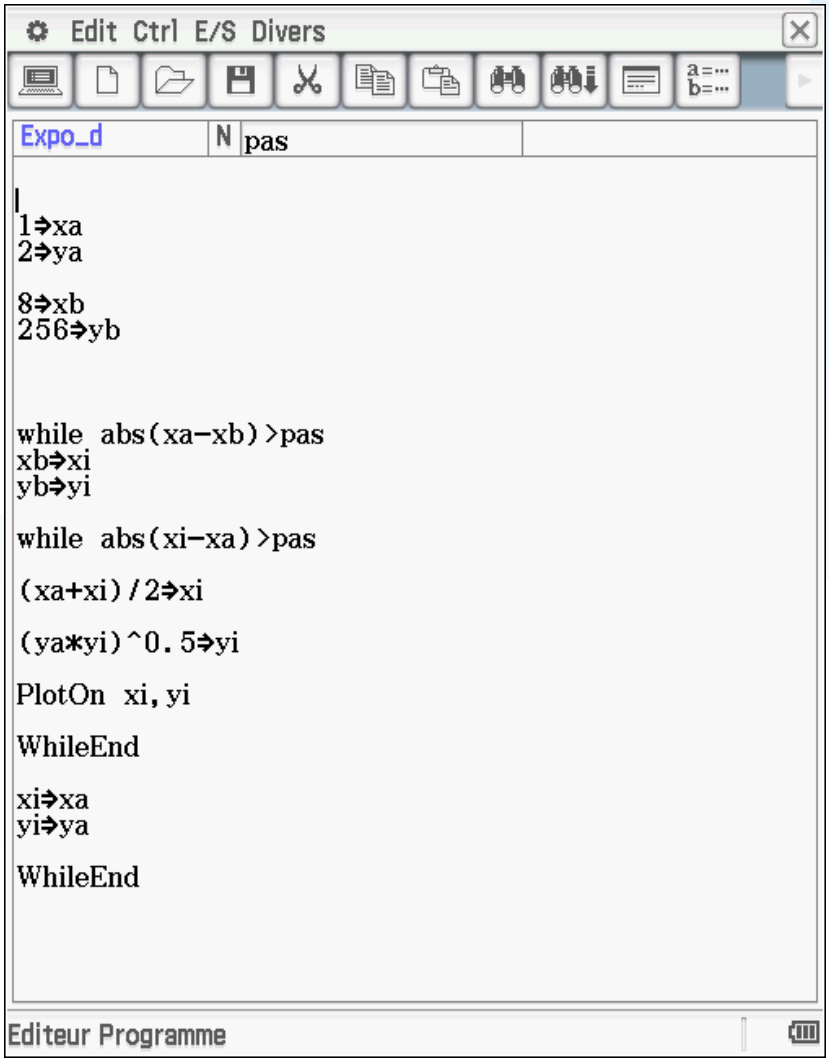
L'utilisation de la moyenne géométrique des ordonnées permet d'imaginer la construction d'une fonction exponentielle simple en connaissant deux de ses valeurs.

Ainsi, si on cherche à construire la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = 2^x$$

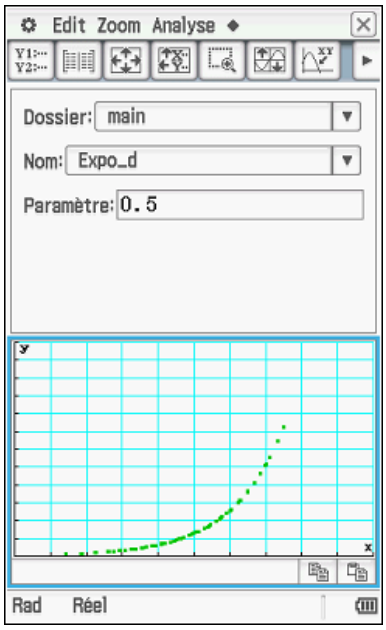
Il suffit de choisir deux valeurs entières pour les abscisses et d'itérer sur un point représentant la moyenne arithmétique en abscisse et géométrique en ordonnée dans un algorithme.

Il ne sera question que de régler un pas adéquat pour que les différentes valeurs soient acceptables visuellement.

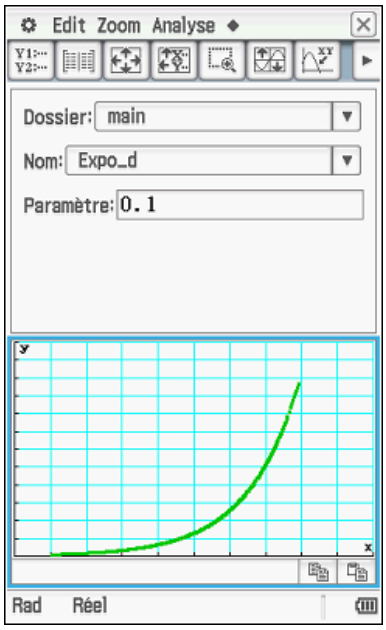



Capture 2.1

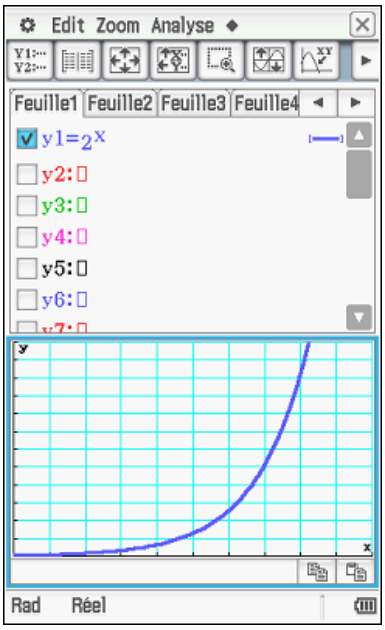
Capture 2.1 : Les point A(1 ;2) et B(8 ;256) définiront notre domaine de construction.
Le point I sera l'intermédiaire représentant les moyennes adéquates.
Notons que le pas est affecté directement au lancement du programme.




Capture 2.2




Capture 2.3




Capture 2.4

Capture 2.2 : Exécutons le programme avec un pas de 0.5.
La courbe représentative point par point est visuellement acceptable.

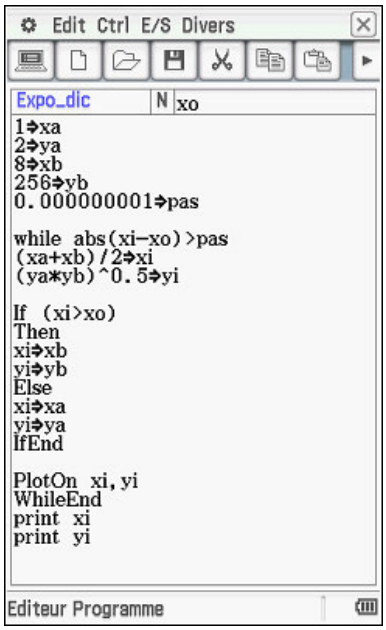
Capture 2.3 : Avec un pas de 0.1, on retrouve une construction sans rupture visuelle. Il est incroyable de constater que l'*itération* sur les milieux des abscisses permet la construction d'une courbe ne connaissant que deux de ses valeurs.

Capture 2.4 : Nous retrouvons la courbe « recherchée » via le mode *graph* de la calculatrice.

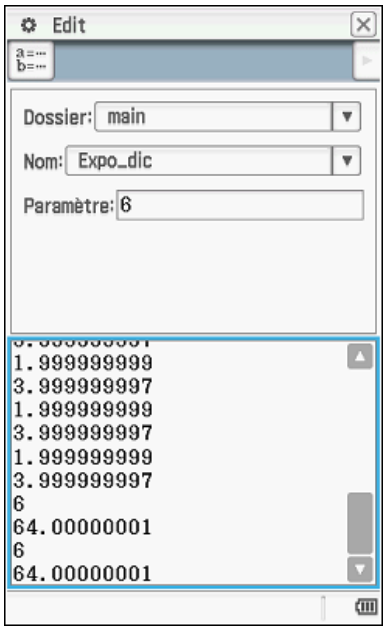
### *Recherche d'une valeur précise*

L'utilisation de la moyenne sur les abscisses permet une construction ne connaissant pas l'équation de la fonction. Mais, cette moyenne ne permet pas pour l'instant de trouver l'image par f d'une valeur précise en abscisse.

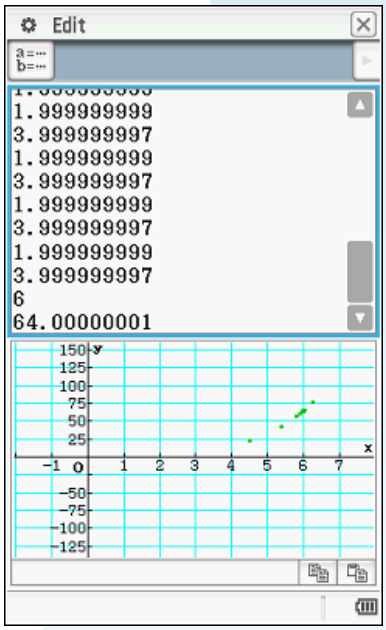
Améliorons notre algorithme pour trouver l'image de $f(x_0)$ pour un $x_0$ donné.




Capture 2.5




Capture 2.6




Capture 2.7

Capture 2.5 : Voici un programme faisant une dichotomie sur l'axe des abscisses.
Il suffit de renseigner le paramètre $x_o$ qui devra bien-entendu être compris entre les valeurs extrêmes données (ici, entre 1 et 8).

Capture 2.6 : Recherchons la valeur approchée pour $x_o$=6, on trouve :

$$\mathbf{2^6 \cong 64}$$

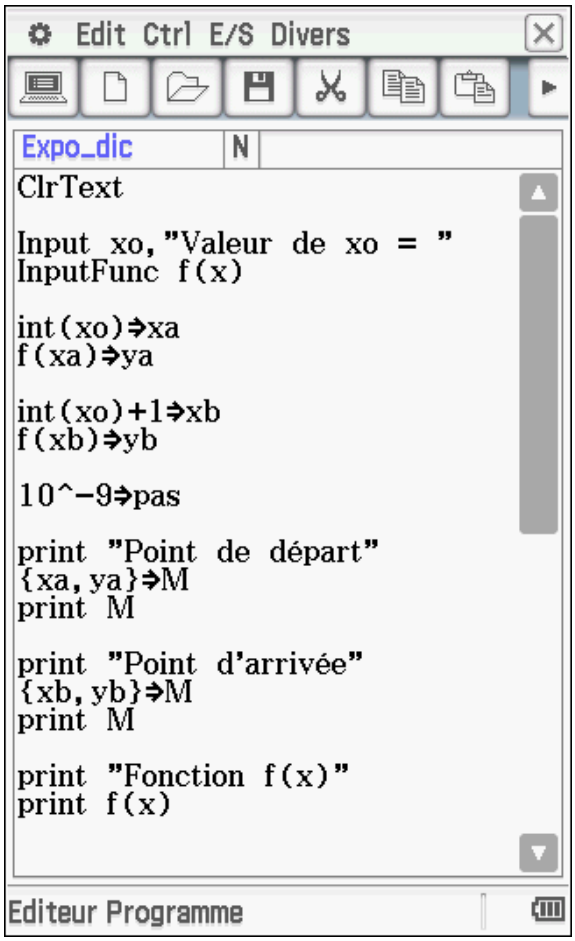
Capture 2.7 : L'utilisation du graphique permet de voir le déplacement de la dichotomie utilisée.

**Amélioration du programme pour n'importe quel $x_0$**

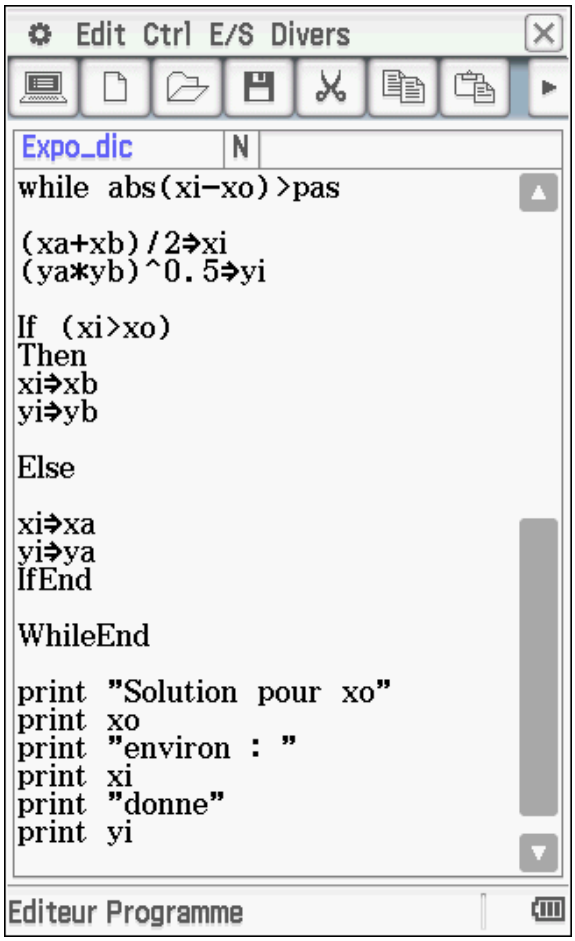
L'idée reste de ne calculer que des valeurs d'antécédents entiers pour trouver par dichotomie la valeur $x_0$ recherchée.

*Notons toutefois que la calculatrice sait sans problème calculer directement $f(x_o)$.*

La démarche algorithmique qui suit une telle réflexion n'a de but que d'ancrer l'introduction d'une fonction de type exponentielle et de son passage du cas discret (connu dès l'utilisation de suites géométriques) au cas continu.




Capture 2.8




Capture 2.9

Capture 2.8 : Dans cette première partie du programme, nous pouvons découvrir que les entrées ne se limitent pas à des valeurs ou des chaines de caractères.
L'instruction :

InputFunc f(x)

permet d'affecter à une fonction sa définition en fonction de $x$.

Capture 2.9 : Le programme en lui-même n'est qu'une dichotomie sur les abscisses entre les valeurs entières encadrant $x_o$.

Capture 2.10 Capture 2.11 Capture 2.12

Capture 2.10 : La demande de la fonction *input* se fait dans une fenêtre de saisie.

Capture 2.11 : La saisie de la fonction f via la fenêtre de saisie permet de faire tourner le programme pour différentes fonctions sans avoir à le modifier. L'idée sera bien-entendu d'y introduire :

$$\boldsymbol{f(x) = e^x}$$

Capture 2.12 : On trouve donc dans cette exemple pour :

$$\mathrm{f(x)} = 10^{\mathrm{x}}$$

$$\boldsymbol{f(2.3) \cong 199,53}$$

Alors que nous n'avions calculé que :

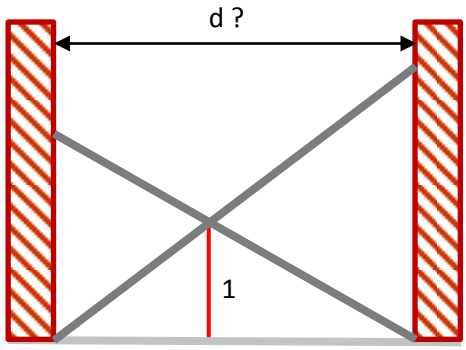
$$f(2) = 100$$

Et,

$$f(3) = 1000$$

# Les deux échelles

Dans un couloir aux murs perpendiculaires au sol, deux échelles (l'une de 5 mètres et l'autre de 8) se croisent à 1 mètre du sol. Quelle est la largeur du couloir ?




## Géométrie dynamique

En utilisant la géométrie dynamique, trouvons une valeur approchée de la taille de ce couloir.

**Questionnement 1**

## Calcul formel et solveur d'équation

En calculant la hauteur de l'intersection des deux échelles en fonction de la largeur du couloir, retrouvons une valeur approchée répondant au problème initial.

**Questionnement 2**

## Algorithme

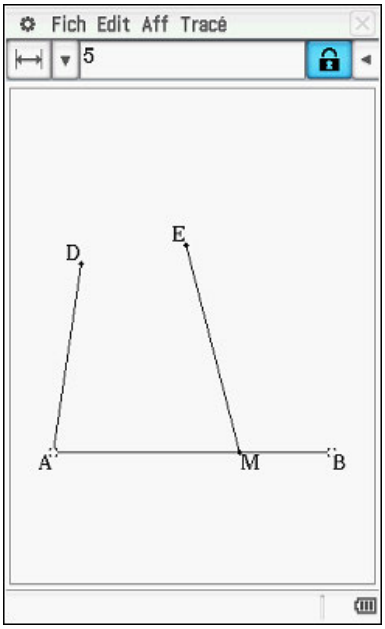
Un programme est possible pour retrouver la réponse en partant d'une largeur de couloir initiale.

**Questionnement 3**

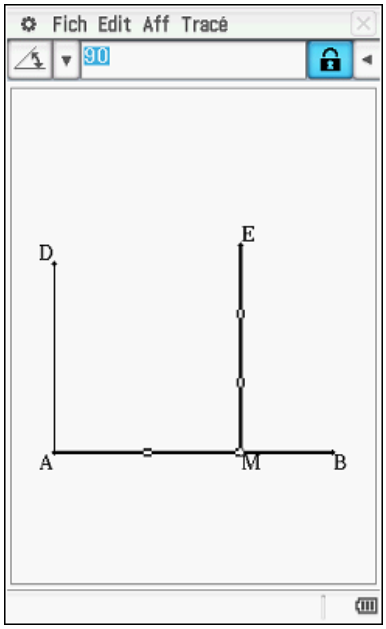
## Géométrie dynamique, questionnement 1

***Une animation pour visualiser la réponse***

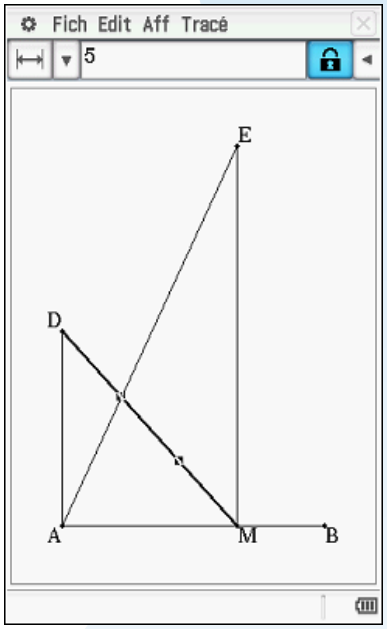
Dessinons la situation pour comprendre.




Capture 1.1




Capture 1.2



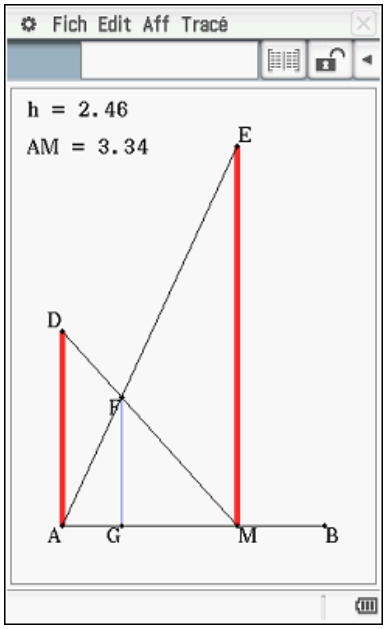

Capture 1.3

Capture 1.1 : Soit [AB] un segment de 5 unités. Et, un point M se déplaçant sur [AB] tel que AM représentera la taille $d$ de notre couloir. Pour l'instant, il suffit de dessiner les segments [AD] et [EM] qui représenteront les murs jusqu'à l'extrémité de chacune des échelles.

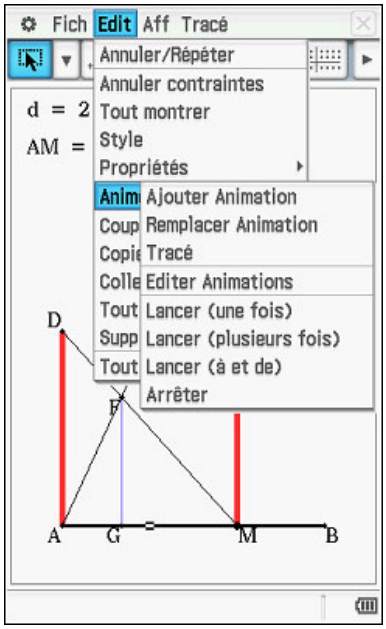
*Il est inutile que AB soit supérieure à 5 unités de longueurs.*

Capture 1.2 : La géométrie dynamique de cette calculatrice permet rapidement d'affecter à des objets leurs caractéristiques. Ainsi, en sélectionnant les segments, nous pouvons imposer les angles droits sans avoir à utiliser de perpendiculaires.

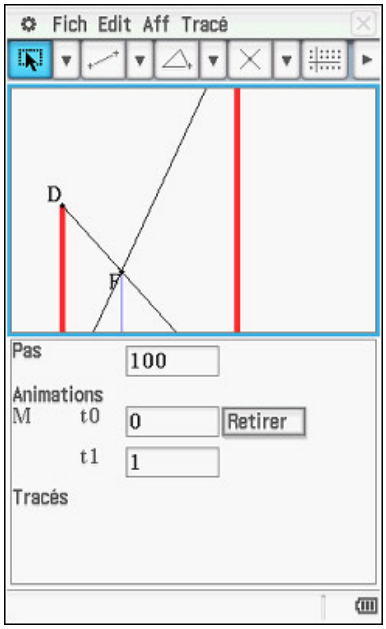
Capture 1.3 : [DM] représentera l'une des échelles. A nouveau, simplement en cliquant sur le segment, nous pouvons lui associer la longueur de 5 unités sans avoir à utiliser les intersections de cercles comme dans une géométrie dynamique classique.




Capture 1.4




Capture 1.5



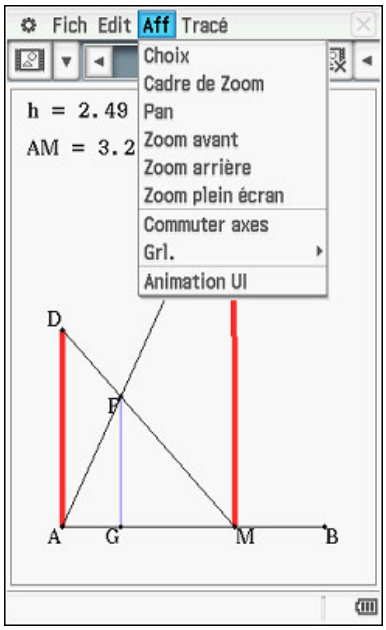

Capture 1.6

Capture 1.6 : Nous pouvons finir la figure en dessinant l'intersection des deux segments puis, en affichant les données utiles.
Par exemple, ici, pour un couloir de 3,34 mètres, les échelles se croisent à une hauteur :

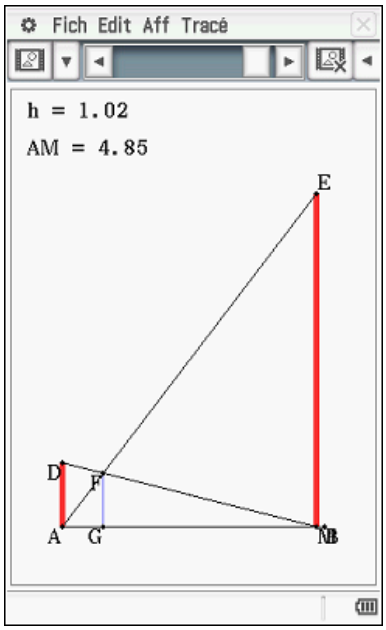
$$h \cong 2{,}46\ m$$

Capture 1.7 : Créons une animation permettant de faire déplacer le point M sur le segment [AB].

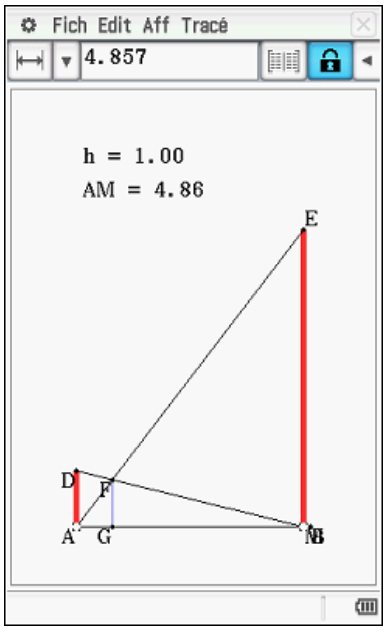
Capture 1.8 : Définissons le pas du déplacement pour que la précision soit acceptable.




Capture 1.7




Capture 1.8



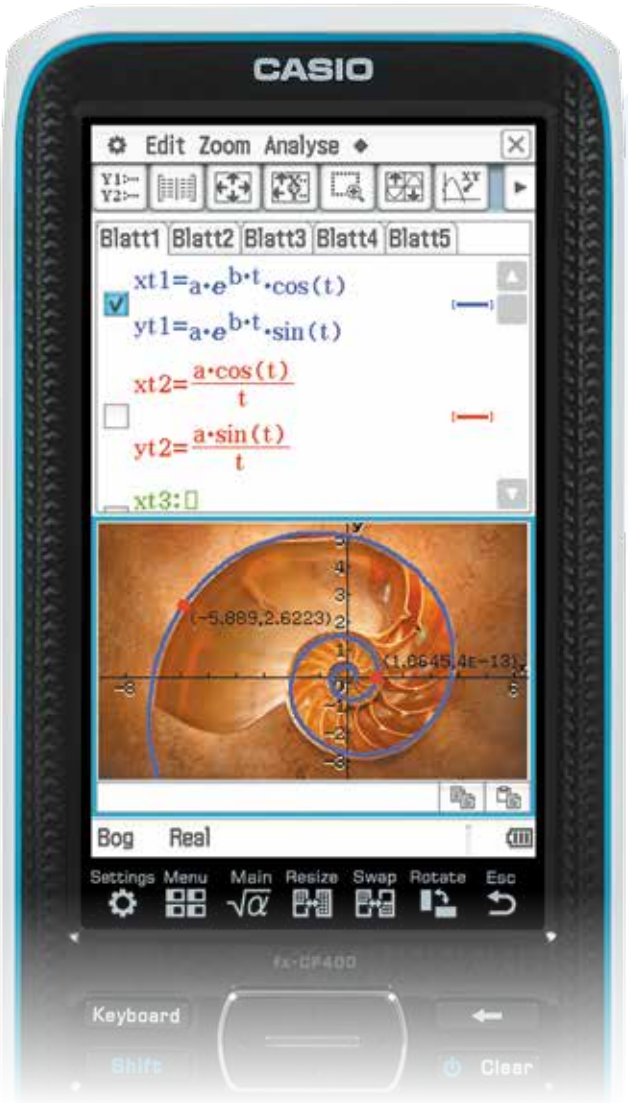

Capture 1.9

Capture 1.7 : Le mode *Animation UI* fait apparaitre un curseur qui nous permet de faire évoluer le point M sur le segment [AB]

Capture 1.8 : En déplaçant M, on trouve une valeur approchée de la taille du couloir.
Comme nous avons partagé l'animation en 100 pas, la précision n'est pas forcément acceptable.

$$\boldsymbol{d \cong 4.85\ m}$$

Capture 1.9 : Il suffit de sélectionner les points A et M pour affréter à la longueur AM, une valeur plus précise.



## Calcul formel et solveur d'équation, questionnement 2

### *Retrouvons la hauteur h en fonction de la largeur d*

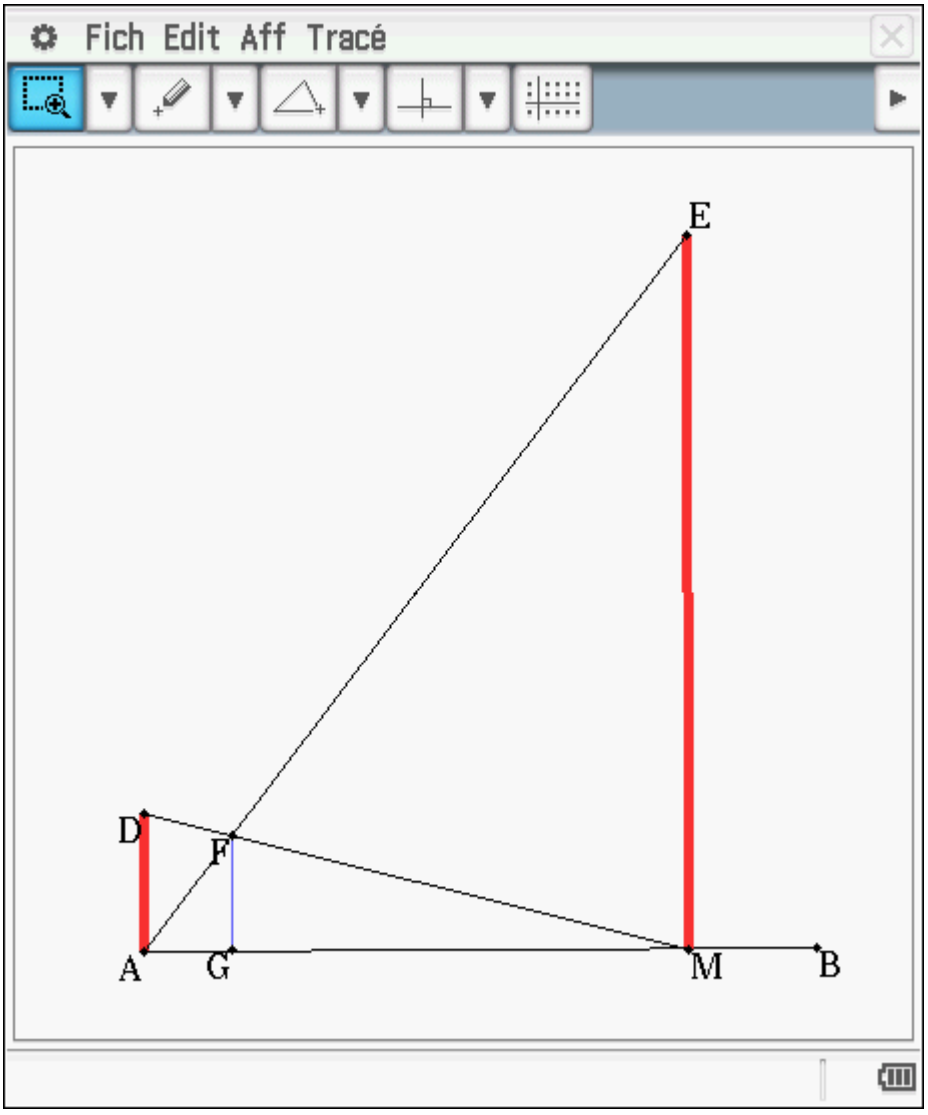
Utilisons la figure précédente pour aborder une vision analytique de ce questionnement.

On sait :

$$DM = 5$$
$$AE = 8$$

Et, posons :

$$FG = h$$
$$AM = d$$




Capture 2.1

En utilisant la propriété de Pythagore dans les triangles ADM puis AEM nous avons :

$$AD^2 + d^2 = 5^2$$

Soit,

$$AD = \sqrt{25 - d^2}$$

Puis,

$$EM^2 + d^2 = 8^2$$
$$EM = \sqrt{64 - d^2}$$

La propriété de Thalès va nous offrir deux égalités :

$$\frac{h}{EM} = \frac{AG}{d}$$

Et,

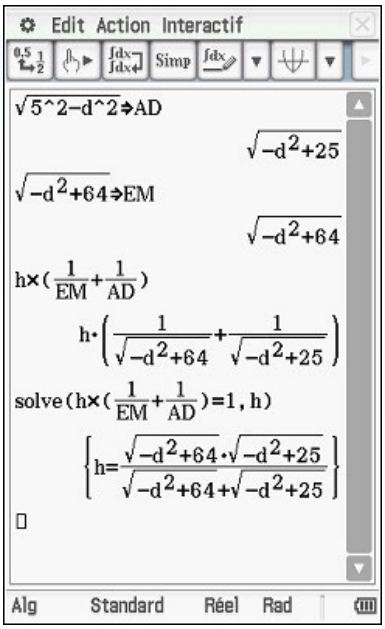
$$\frac{h}{AD} = \frac{MG}{d}$$

Que nous pouvons additionner :

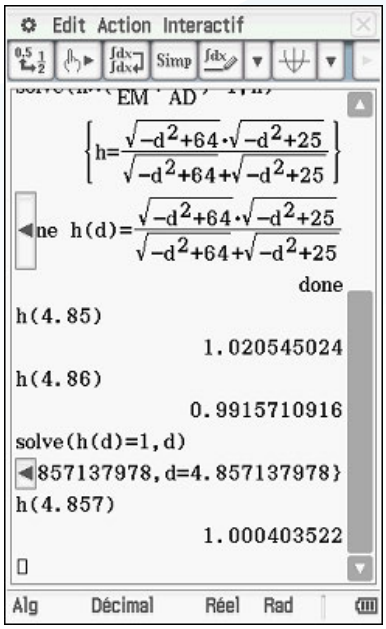
$$h\left(\frac{1}{EM} + \frac{1}{DA}\right) = \frac{AG + MG}{d} = 1$$

Et, obtenir :

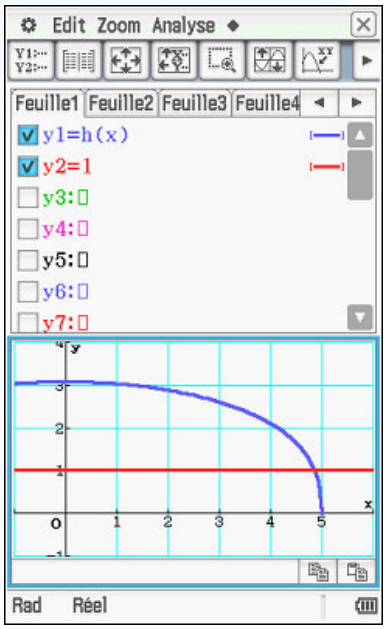
$$\boldsymbol{h(d) = \frac{\sqrt{64 - d^2} \times \sqrt{25 - d^2}}{\sqrt{64 - d^2} + \sqrt{25 - d^2}}}$$




Capture 2.2




Capture 2.3




Capture 2.4

Capture 2.2 : Nous pouvons dans le mode *principal* affecter une variable ayant plusieurs lettres. Ainsi les longueurs AD et EM peuvent directement être utilisées.

Capture 2.3 : La fonction solve() va nous offrir l'expression de *h* en fonction de *d* en utilisant la propriété de Thalès décrite précédemment.

$$h(d) = \frac{\sqrt{64 - d^2} \times \sqrt{25 - d^2}}{\sqrt{64 - d^2} + \sqrt{25 - d^2}}$$

que nous pourrions aussi écrire :

$$\boldsymbol{h(d) = \frac{1}{\sqrt{64 - d^2}} + \frac{1}{\sqrt{25 - d^2}}}$$

Capture 2.4 : Il est maintenant possible de retrouver une valeur approchée plus précise en résolvant l'équation :

$$h(d) = 1$$

$$\boldsymbol{d \cong 4,857\ m}$$

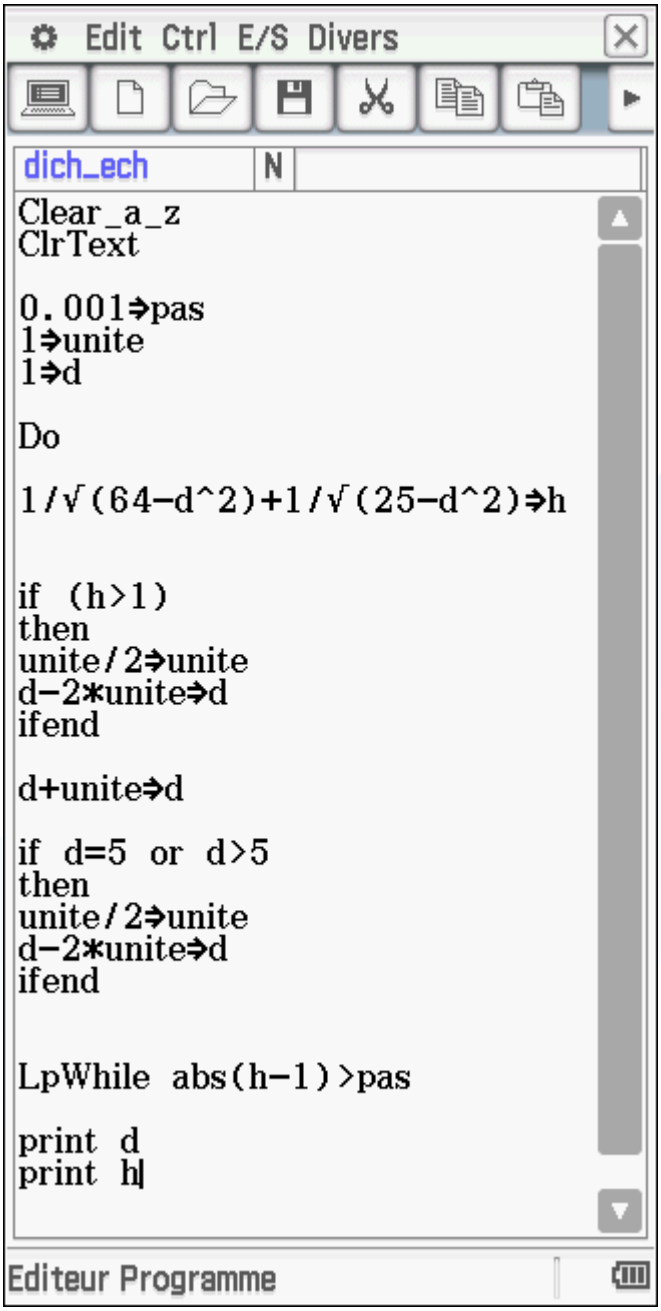
Capture 2.5 : Solution que nous pouvons retrouver graphiquement.

## Algorithme, questionnement 3

***Retrouvons la réponse précédente à l'aide d' un programme***

Le but maintenant est de retrouver la largeur du couloir via un algorithme de programmation.

Pour ne pas faire une dichotomie déjà présente dans le manuel, nous allons itérer la longueur du couloir en lui ajoutant toujours la même valeur.

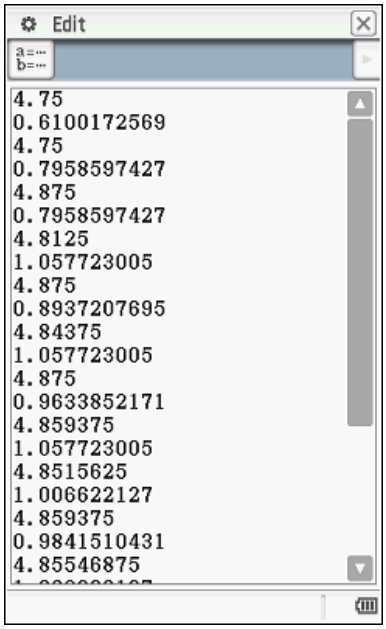



Capture 3.1

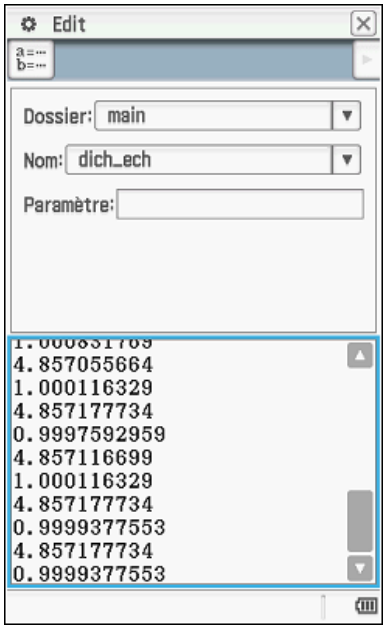
Capture 2.2 : Voici un programme non habituel qui va nous permettre de faire évoluer la largeur du couloir (*d*) en fonction d'un paramètre (*unité*). Les contraintes de programmations

sont telles que si la hauteur (h) n'est pas définie ou si elle dépasse la taille recherchée (1) alors, on change le pas du paramètre (*unité*) et on recommence.

Capture 3.2




Capture 3.3




Capture 3.4

Capture 3.2 : Exécutons le programme directement. On trouve avec un pas de 0.001 :

$$\boldsymbol{d \cong 4.856}$$

Capture 3.3 : En rajoutant des lignes

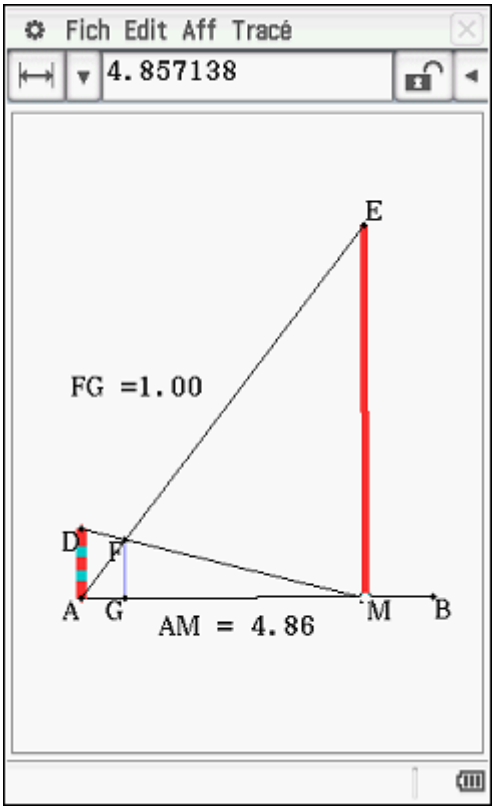
$$print\ d$$

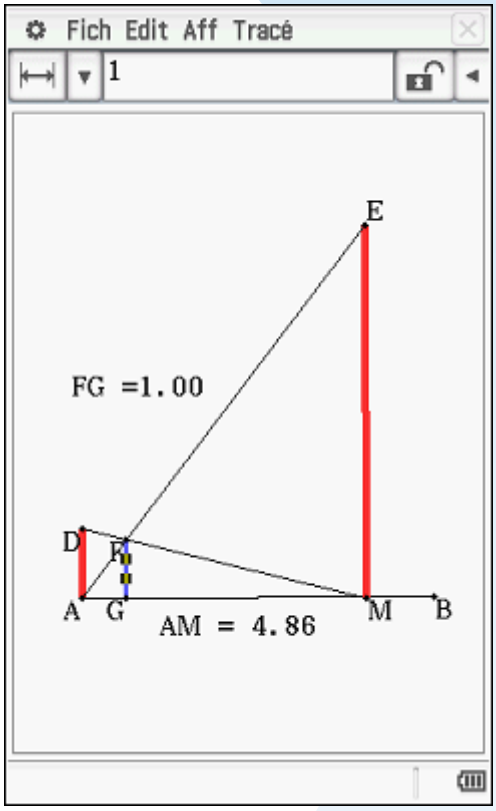
$$print\ h$$

Il est possible de visualiser les calculs effectués. Nous remarquons que nos conditions ne permettent pas dans notre algorithme une bonne optimisation de la programmation. Ainsi, lorsqu'une des conditions n'est plus acceptable, la distance reprend sa valeur précédente : ce qui engendre deux fois le même calcul. Ce programme ne demande du coup, qu'à être amélioré !

Capture 3.4 : Avec un pas plus petit, nous retrouvons la valeur proposée par le solveur d'équation.

$$\boldsymbol{d \cong 4.857\ m}$$




Capture 3.5 Capture 3.6

Capture 3.5 : un retour dans le mode de géométrie permet d'affecter au segment AM la valeur la plus précise que nous ayons trouvée :

$$\boldsymbol{AM \cong 4,857138}$$

Capture 3.6 : on retrouve une hauteur pour l'intersection des deux échelles de

$$\boldsymbol{h \cong 1}.$$

# Tangeante à la courbe

Dans la plupart des programmes de terminale, il est demandé un moment ou un autre de calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point d'abscisse donné.

Plusieurs méthodes peuvent répondre à ce type de questionnement

## Mode Graph

Peut-on trouver directement, en faisant apparaitre la représentation graphique de la fonction :

$$f(x) = xln(x)$$

l'équation de sa tangente au point $x_o$**=1**

**Questionnement 1**

## eActivity pour automatiser

Il est possible d'automatiser le calcul en utilisant le mode *eActivity*.
Et, ainsi avoir une rédaction propre du calcul à fournir pour avoir une explication cohérente.

**Questionnement 2**

## Le calcul formel

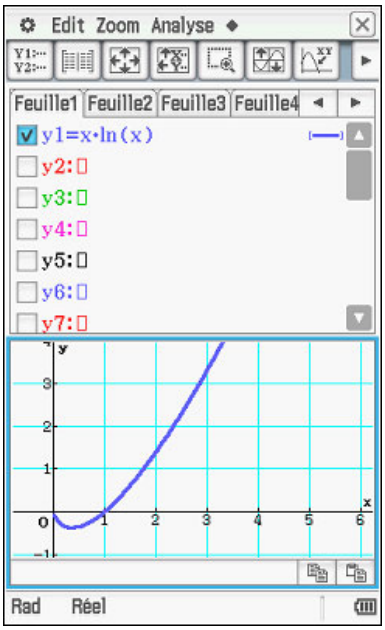
Retrouvons l'équation de la tangente sous sa forme générale au travers du calcul formel de la calculatrice. Pour automatiser la démarche lors des calculs à venir.

**Questionnement 3**

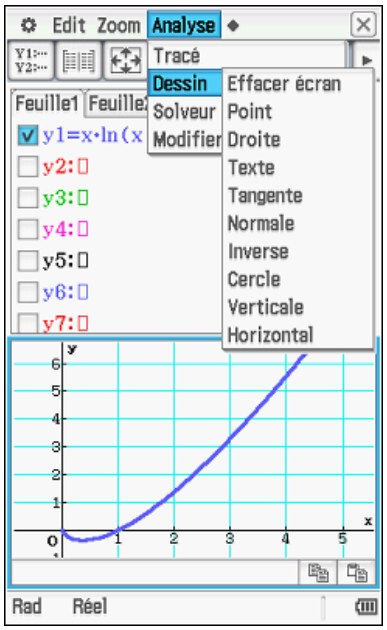
## Mode graph, questionnement 1

### *Un calcul direct, utilisation du mode graphique de la calculatrice*

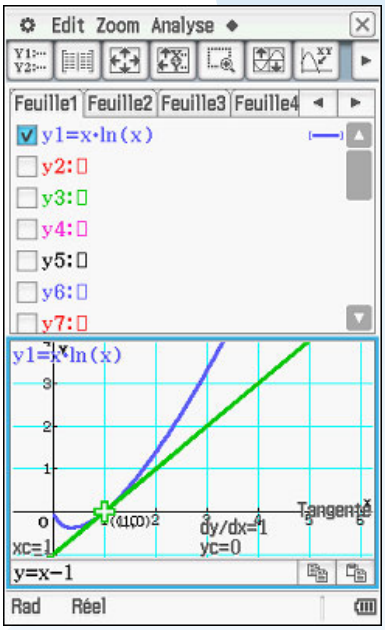
Parfois, si l'équation de la tangente est demandée sans calcul ni explication, autant directement utiliser la calculatrice.




Capture 1.1




Capture 1.2




Capture 1.3

Capture 1.1 : Nous pouvons afficher la représentation graphique de la fonction f telle que :

$$f(x) = xln(x)$$

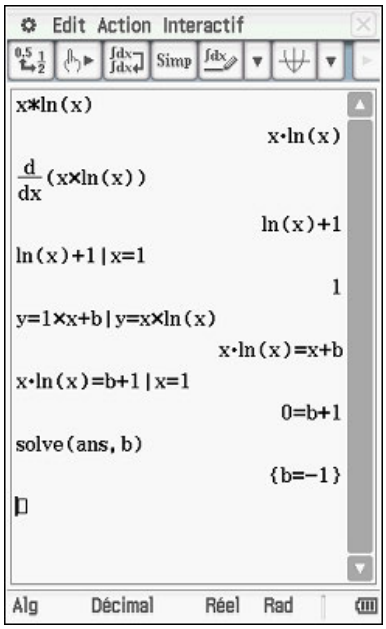
Capture 1.2 : Une fois tracée, le mode *Analyse* permet différents calculs dont la représentation de la tangente en un point d'abscisse donné.

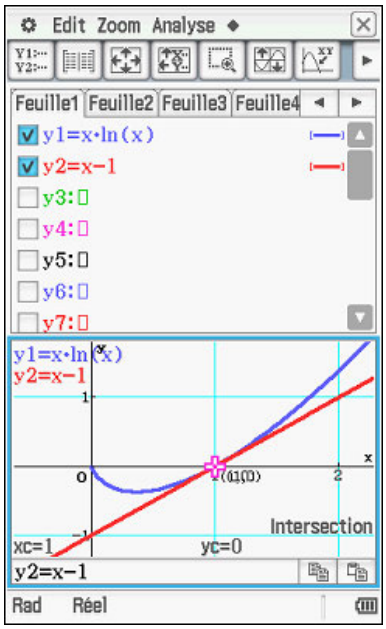
Il suffit de rentrer :

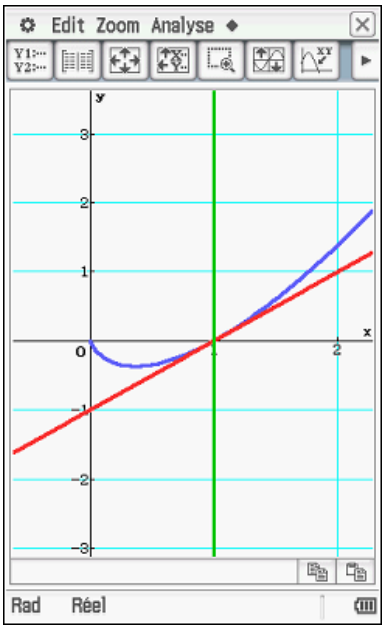
$$X = 1$$

Capture 1.3 : Une fois l'abscisse sélectionnée, la tangente se dessine et son équation s'affiche.

$$T_{x_0=1}: \boldsymbol{y = x - 1}$$




Capture 1.4 Capture 1.5 Capture 1.6

Capture 1.4 : Dans le mode principal, nous pouvons retrouver l'équation de la tangente en x=1. L'utilisation du *sachant* (|) permet d'affecter des valeurs en gardant une égalité compréhensible.
La résolution de l'équation de degré 1 n'est qu'une formalité.

Capture 1.5 : Le mode graphique peut aussi servir de vérification. Si on dessine la courbe et la tangente directement, on retrouve une seule intersection pour

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Bien entendu, pour le nombre dérivé en 1, l'utilisation de la formule de dérivation est nécessaire :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Capture 1.6 : Un agrandissement de la zone représentative est envisageable pour visualiser le tout.

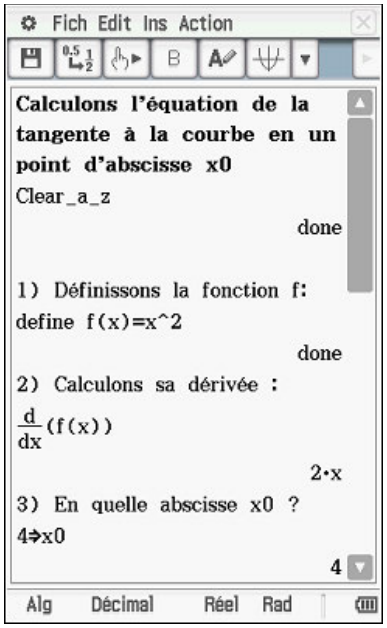
Notons que les équations de droites verticales sont possibles.

## eActivity, questionnement 2

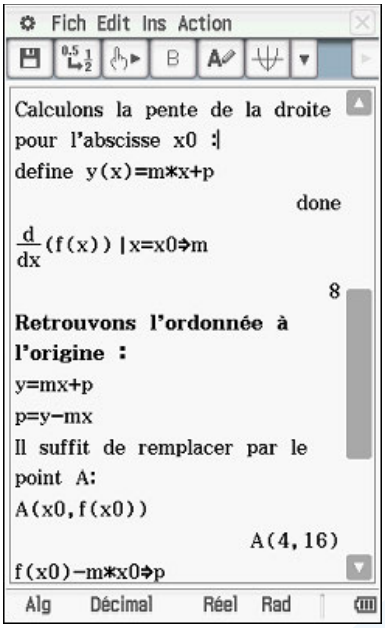
### *Pour automatiser*

Lorsque plusieurs équations de tangentes à différentes courbes sont demandées, il est utile de savoir automatiser le travail pour ne plus avoir à gérer les étapes soit en calcul direct soit via le mode *graph* vu précédemment.

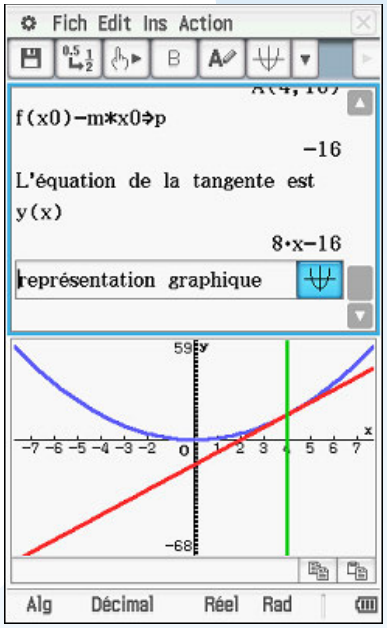
*L'eActivity* permet l'édition sous la forme de texte avec insertion de modules mathématiques.




Capture 2.1




Capture 2.2




Capture 2.3

Capture 2.1 : Créons un nouveau document texte, il est possible de le mettre en forme et d'y ajouter des lignes de calculs. Par exemple :

*Clear A_z* : efface les variables. Notons que les variables d'une eActivity sont locales : du coup, il n'y a pas d'interaction avec le reste de la calculatrice et nous pouvons conserver nos calculs autant de temps que nécessaire.

*Define f(x)* : sera notre première *ligne de calcul*, c'est ici, que nous allons changer de fonctions au gré des demandes. Pour notre premier exemple :

$$f(x) = x^2$$

$x0$ : nous donnera l'abscisse où la tangente devra être calculée.

Capture 2.2 : Ainsi, dans cette feuille de calculs, en changeant les valeurs de *f(x)* et de $x_0$, nous pouvons avoir le déroulement logique et expliqué d'un schéma de calculs sans en avoir les inconvénients.

Capture 2.3 : Une fois la tangente calculée, il est aussi possible d'insérer une ligne géométrique. Ici, nous avons fait apparaitre les courbes des fonctions adéquates. Pour ne pas avoir à les modifier si les exemples changent. Il suffit d'écrire dans ce mode graph intégré :

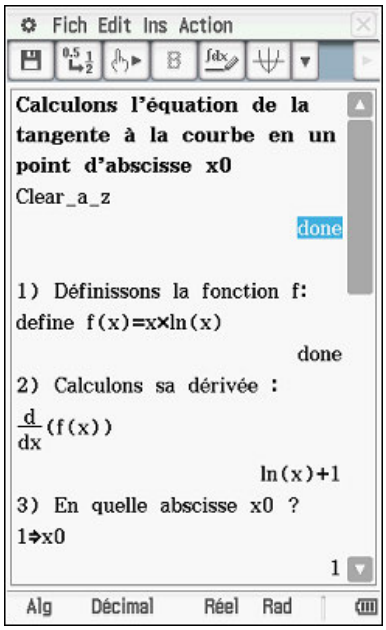
$$Y1 = f(x)$$
$$Y2 = y(x)$$
$$x3 = x0$$

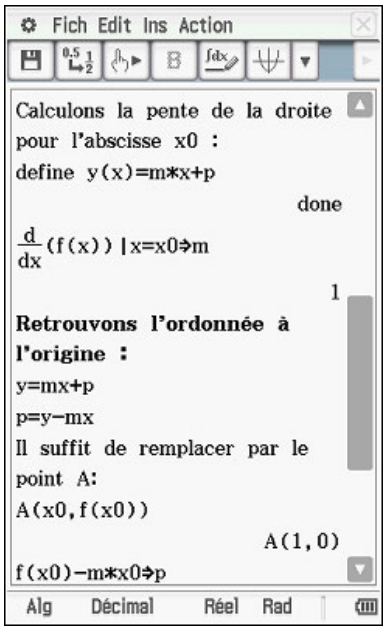
On retrouve pour :

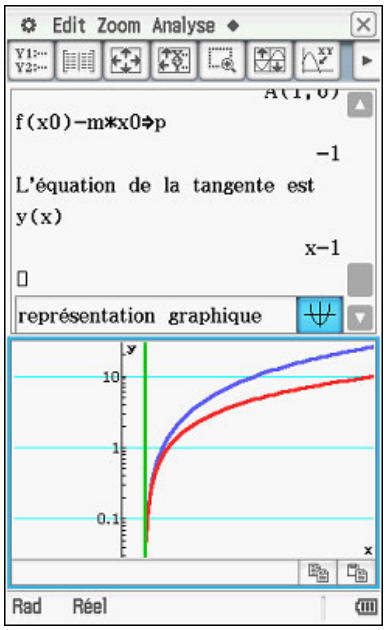
$$\boldsymbol{T_{x_0} : y = 8x - 16}$$

Pour

$$f(x) = x^2 en\ x_0 = 4$$




Capture 2.4 Capture 2.5 Capture 2.6

Capture 2.4 : Un autre exemple avec la fonction :

$$\boldsymbol{f(x) = xln(x)}$$

en :

$$x_0 = 1$$

Capture 2.5 : Les calculs permettent de retrouver la démarche vue graphiquement.

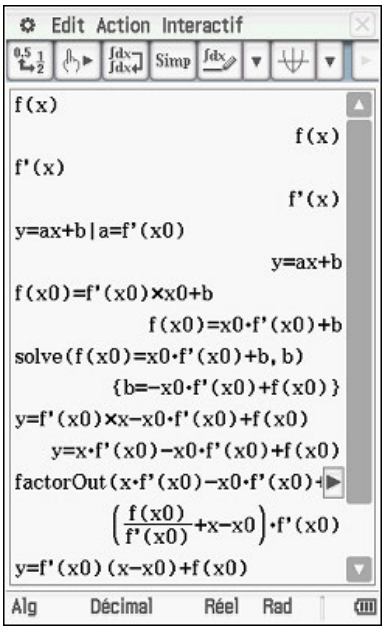
Capture 2.6 : L'équation de la tangente est bien :

$$\boldsymbol{y = x - 1}$$

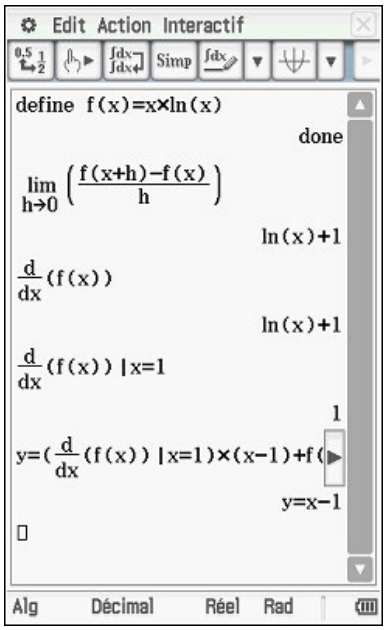
Il est possible dans la représentation de choisir une échelle logarithmique pour afficher la courbe et sa tangente. Ce qui permet d'ouvrir un nouveau champ des possibles dans l'acquisition des notions rencontrées en mathématiques.

## Le calcul formel, questionnement 3

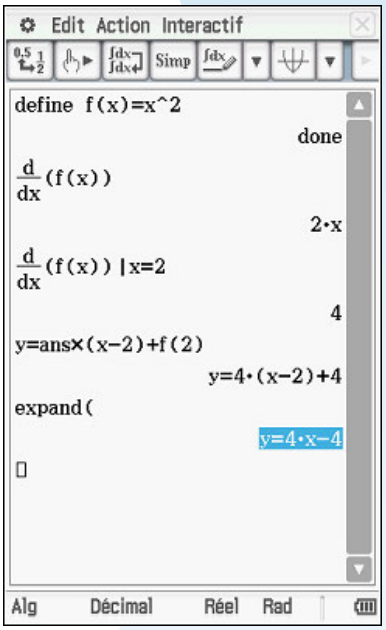
***De part l'usage du calcul formel, il est possible de retrouver le cas général de l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f(x) au point d'abscisse $x_0$.***




Capture 3.1




Capture 3.2




Capture 3.3

Capture 3.1 : Un travail direct en conservant les formes génériques de la fonction $f(x)$ permet de trouver une équation de la tangente bien connue :

$$\boldsymbol{T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

FactorOut : permet de mettre en facteur un élément particulier (ici, *f'(x₀)* ).

La fonction *solve()* nous propose l'ordonnée à l'origine alors que le calcul formel n'est défini sur aucune fonction ni valeur.

Capture 3.2 : Un travail autour de la limite et du nombre dérivé permet si on le souhaite d'expliquer l'idée de cette tangente.
Par exemple, pour :

$$\boldsymbol{xln(x)}$$

on retrouve sa dérivée comme définition du nombre dérivé :

$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ln(x) + 1}$$

Soit,

$$\big(xln(x)\big)' = \ln(x) + 1$$

Et, nous retrouvons directement en remplaçant  dans l'équation précédente pour $x_0=1$ :

$$T_{x_0=1}: y = x - 1$$

Capture 3.3 : Attention toutefois, l'utilisation d'une forme pour le calcul de la tangente ne nous prive pas d'un travail mécanique.

Ainsi, l'abscisse $x_0$ devra être remplacée au bon endroit dans l'équation pour ne pas avoir une erreur de calcul.

**Le mode *eActivity* sera donc bien plus souple pour aboutir au bon résultat.**

# Notes personnelles

# Notes personnelles

# Notes personnelles

**CASIO Éducation**
Immeuble Phénix 1
24 rue Émile Baudot - 91120 PALAISEAU
Email : education-france@casio.fr
Auteur : Jean-Philippe Blaise
Réalisation : Arc'ad+
Diffusion : Professeurs de mathématiques exclusivement
Juin 2014

4 971850 089698
EX2-FX-CP400-2014

CASIO
www.casio-education.fr